

Rapport de stage

12 Juin 2017 - 21 Juillet 2017

Modèle discret de gravité quantique en 2D

Sous la direction de Valentin Bonzom,
Laboratoire d'informatique de Paris Nord
Université Paris XIII

Maxime Médevielle
Université Paris XI
L3-Magistère1 de Physique Fondamentale d'Orsay

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement Valentin Bonzom qui a accepté d'encadrer ce stage. Je le remercie particulièrement pour tout le temps qu'il m'a accordé, que je sais précieux, et pour toute la grande pédagogie et patience qu'il a montré à mon égard.

Résumé

La gravité quantique est une branche de la physique théorique qui cherche à unifier sous une même théorie la Mécanique Quantique avec la Relativité Générale. Les approches les plus "naïves" d'unification ont échoué principalement parce que la gravitation est "non-renormalisable". Différentes approches à ce problème sont étudiées aujourd'hui, parmi les plus connues, on peut citer la théorie des cordes ou encore la gravité quantique à boucles.

Le but de ce stage a été de me familiariser avec un modèle discret d'un espace en 2 dimensions afin d'essayer de refaire par moi-même des raisonnements ou calculs liés à ce modèle. Principalement ce stage consistait à étudier la fonction de partition de ce modèle de gravité quantique, en premier lieu trouver une expression formelle exploitable de cette fonction en terme de triangulations aléatoires. Dans un second temps, j'ai étudié deux méthodes permettant de mener le calcul effectif de cette fonction de partition : la méthode du col et la méthode des polynômes orthogonaux.

Abstract

Quantum Gravity is a branch of theoretical physics that seeks to unify under the same theory both Quantum Mechanics and General Relativity. The most "naive" approaches of unification have failed mainly because gravitation is "non-renormalizable". Different approaches to this problem are studied today amongst the most notorious ones we can mention String Theory or Loop Quantum Gravity.

The purpose of this traineeship was to get familiar with a discrete model of a 2 dimensional space in order to try to do, by myself, some reasonings or calculations linked to this model. Mainly this traineeship consisted in studying the partition function of this quantum gravity model, firstly find a formal exploitable form of this function in terms of random triangulations. Secondly, I studied two methods that allow to perform the calculation of this partition function : the method of steepest descent and the method of orthogonal polynomials.

Table des matières

1	Introduction	5
2	Modèle de matrices	6
2.1	Cas scalaire	6
2.2	Cas matriciel	7
2.3	Modèle à une matrice et lien avec la fonction de partition	9
3	Calcul de la fonction de partition	12
3.1	Méthode du col	12
3.2	Polynômes orthogonaux	14
4	Conclusion	18
A	Calcul explicite de $\langle Tr(M^4) \rangle$	19
B	Nombres de Catalan	19
C	Démonstration de (18)	21
D	Densité de distribution de valeurs propres dans la cas gaussien	22
E	Demonstration de (25)	22

1 Introduction

On se donne comme objectif de pouvoir calculer la fonction de partition Z de la gravité quantique 2D définie comme ceci :

$$Z = \sum_h \int \mathcal{D}g e^{-\Lambda A - \gamma \chi} \quad (1)$$

avec $\int \mathcal{D}g$ la somme sur toutes les géométries aux systèmes de coordonnées près, \sum_h la somme sur les genres, Λ la constante cosmologique, A l'aire de la surface, γ la constante de Newton, $\chi = 2 - 2h$ la caractéristique d'Euler de la surface. Cette fonction de partition permet entre autre, comme on l'a vu en physique statistique cette année, de déterminer des grandeurs moyennes relatives à la surface (son aire moyenne par exemple).

La somme sur les géométries est en pratique difficile à calculer. L'astuce va être de considérer des triangulations (on devrait plutôt dire des polygonulations) aléatoires de la surface.

Prenons par exemple le cas d'une quadrangulation. On va imposer que les quadrangles soient des carrés, on peut ainsi suivre la courbure en chaque sommet comme ceci : soit N_i le nombre de carrés incidents au sommet i , alors la courbure est :

- négative si $N_i > 4$
- nulle si $N_i = 4$
- positive si $N_i < 4$

En imposant que les carrés aient une aire unitaire, l'aire de la surface devient simplement $A = \sum_i N_i / 4$ (A compte le nombre de carrés). L'hypothèse va donc être de dire que l'on peut remplacer la somme sur les géométries et topologies par une somme discrète sur les triangulations aléatoires dans le cas discret. Finalement notre fonction de partition a comme forme :

$$Z = \sum_{\substack{\text{quadrangulations} \\ \text{aléatoires } Q}} \frac{e^{-\Lambda A - \gamma \chi}}{|Aut(Q)|} \quad (2)$$

Le terme au dénominateur revient à quotienter par l'action des difféomorphismes qui ne représentent qu'un changement de coordonnées.

2 Modèle de matrices

2.1 Cas scalaire

Pour se familiariser avec le concept, commençons par étudier le cas scalaire. On considère la moyenne gaussienne suivante :

$$\langle e^{\lambda\phi^4/4!} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi}{\sqrt{2\pi}} e^{-\phi^2/2 + \lambda\phi^4/4!} \quad (3)$$

On s'autorise à intervertir l'intégrale avec la somme provenant de l'exponentielle quartique ce qui donne :

$$\sum_n \frac{\lambda^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi}{\sqrt{2\pi}} e^{-\phi^2/2} \left(\frac{\phi^4}{4!} \right)^n \quad (4)$$

On veut donc trouver un moyen de calculer $\int_{-\infty}^{\infty} d\phi e^{-\phi^2/2} \phi^{2k}$.

Pour cela on utilise la méthode de l'intégrale source en considérant $\int_{-\infty}^{\infty} d\phi e^{-\phi^2/2 + J\phi}$

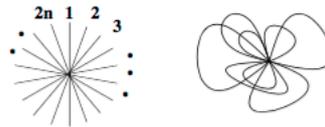
On remarque ainsi que $\frac{\partial}{\partial J^{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi e^{-\phi^2/2 + J\phi} |_{J=0} = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi e^{-\phi^2/2} \phi^{2k}$

$$\text{Or } -\phi^2/2 + J\phi = -\frac{1}{2}((\phi - J)^2 - J^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial J^{2k}} e^{J^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi e^{-(\phi - J)^2/2} |_{J=0} = \sqrt{2\pi} \frac{\partial}{\partial J^{2k}} e^{J^2/2} |_{J=0}$$

Considérons le développement en série de Taylor de $f(x) = e^{x^2/2}$ au voisinage de 0 :

$\sum_n \frac{x^n f^{(n)}(0)}{n!} = \sum_n \frac{x^{2k}}{2^k k!}$ Dans le membre de gauche lorsque $n=2k$ on identifie avec le terme du membre de droite correspondant et on obtient $f^{(2k)}(0) = \frac{(2k)!}{2^k k!} = (2k-1)!!$. $(2k-1)!!$ correspond au nombre d'appariements différents de $2k$ objets. On peut donner une interprétation graphique :



Le diagramme en étoile de gauche représente le terme x^{2n} . Le second diagramme est une saturation particulière du diagramme en étoile et représente ainsi une contribution non nulle à $\langle x^{2n} \rangle$ c'est-à-dire à un appariement particulier de chaque paire de demi-arête en une arête.

C'est une illustration du théorème de Wick dans sa version scalaire :

$$\langle x^{2n} \rangle = \sum_{\text{appariements}} \prod \langle x^2 \rangle \quad (5)$$

Grâce à l'intégrale source on a donc une expression pour notre intégrale de départ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi}{\sqrt{2\pi}} e^{-\phi^2/2 + \lambda\phi^4/4!} = \sum_n \frac{\lambda^n (4n-1)!!}{24^n n!} \quad (6)$$

Ces diagrammes n'ont pas encore assez de structure pour définir une surface de Riemann, c'est pourquoi on va maintenant étudier des intégrales de matrices.

2.2 Cas matriciel

On fait pareil que précédemment en considérant :

$$\langle f(M) \rangle = \frac{1}{Z_0(N)} \int dM e^{-N \text{Tr}(M^2/2)} f(M) \quad (7)$$

l'intégrale agit sur l'ensemble des matrices hermitiennes NxN avec la mesure de Haar $dM = \prod_i dM_{ii} \prod_{i < j} d\text{Re}(M_{ij}) d\text{Im}(M_{ij})$ et $Z_0(N)$ tel que $\langle 1 \rangle = 1$.

On considère de nouveau l'intégrale source :

$$\begin{aligned} \langle e^{\text{Tr}(SM)} \rangle &= \frac{1}{Z_0(N)} \int dM e^{-N \text{Tr}(M^2/2) + \text{Tr}(SM)} \\ &= \frac{1}{Z_0(N)} \int dM e^{-N/2 [\text{Tr}(M^2) - \frac{\text{Tr}(2SM)}{N}]} \end{aligned}$$

Or $\text{Tr}(2SM) = \text{Tr}(SM) + \text{Tr}(SM) = \text{Tr}(SM) + \text{Tr}(MS) = \text{Tr}(SM + MS)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle e^{\text{Tr}(SM)} \rangle &= \frac{1}{Z_0(N)} \int dM e^{-N/2 [\text{Tr}(M^2) - \frac{\text{Tr}(SM)}{N} - \frac{\text{Tr}(MS)}{N} + \text{Tr}(S^2/N^2) - \text{Tr}(S^2/N^2)]} \\ &= \frac{1}{Z_0(N)} \int dM e^{-N/2 [\text{Tr}((M-S/N)^2) - \frac{1}{N^2} \text{Tr}(S^2)]} \\ &= \frac{1}{Z_0(N)} e^{\frac{\text{Tr}(S^2)}{2N}} \int dM e^{\frac{-N \text{Tr}((M-S/N)^2)}{2}} \\ &= \frac{1}{Z_0(N)} e^{\frac{\text{Tr}(S^2)}{2N}} \underbrace{\int dM' e^{\frac{-N \text{Tr}(M'^2)}{2}}}_{=Z_0(N)} \end{aligned}$$

Conclusion : $\langle e^{\text{Tr}(SM)} \rangle = e^{\frac{\text{Tr} S^2}{2N}}$

On en déduit que comme dans le cas scalaire : $\langle M_{ij} M_{kl} \dots \rangle = \frac{\partial}{\partial S_{ji}} \frac{\partial}{\partial S_{lk}} \dots e^{\frac{\text{Tr} S^2}{2N}} \Big|_{S=0}$
(Bien remarquer la permutation d'indice à cause de $\text{Tr}(MS)$).

Dans le cas le plus simple de deux éléments de matrice :

$$\langle M_{ij}M_{kl} \rangle = \frac{\partial}{\partial S_{ji}} \frac{\partial}{\partial S_{ik}} e^{\frac{TrS^2}{2N}} \Big|_{S=0} = \frac{\partial}{\partial S_{ji}} \frac{S_{kl}}{N} e^{\frac{TrS^2}{2N}} \Big|_{S=0} = \frac{\partial S_{kl}}{\partial S_{ji}} \frac{1}{N} e^{\frac{TrS^2}{2N}} \Big|_{S=0} + \underbrace{\frac{S_{kl}S_{ij}}{N^2} e^{\frac{TrS^2}{2N}} \Big|_{S=0}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \langle M_{ij}M_{kl} \rangle = \frac{\delta_{jk}\delta_{il}}{N} \quad (8)$$

Cette moyenne gaussienne s'appelle un propagateur.

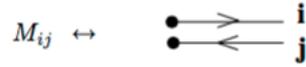
Ainsi pour une paire (i,j) il faut prendre les paires de dérivées par rapport à S_{ij} et S_{ji} afin d'obtenir une contribution non nulle. On peut ainsi exprimer les moyennes gaussiennes en fonction des propagateurs grâce à la version matricielle du théorème de Wick :

$$\langle \prod_{(i,j) \in I} M_{ij} \rangle = \sum_{\text{appariements } P} \prod_{(i,j),(k,l) \in P} \langle M_{ij}M_{kl} \rangle \quad (9)$$

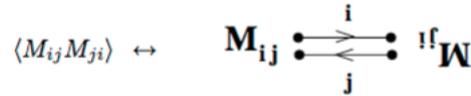
On remarque que d'après (8), beaucoup de termes de (9) vont s'annuler.

On peut de nouveau donner une interprétation graphique pour les termes non nuls de (9) :

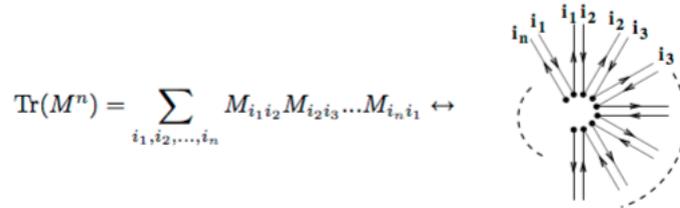
On représente un élément de M comme une demi arête :



Ainsi on représente (8) en joignant deux demi-arêtes M_{ij} et M_{kl} mais qui est non nulle si et seulement si i et j sont conservés suivant les lignes orientées, ce qui donne :



On peut également représenter $Tr(M^n)$ de la façon suivante :



Nous allons maintenant utiliser ces diagrammes pour calculer $\langle Tr(M^n) \rangle$ lorsque $N \rightarrow \infty$. Pour calculer $\langle Tr(M^n) \rangle$ on dessine $Tr(M^n)$ puis on utilise (9) pour exprimer le résultat comme une somme sur toutes les saturations de l'étoile. Par exemple pour $n=2p$ (si n est impair alors la moyenne est nulle) on a de nouveau

$(2p-1)!!$ termes (pour $N=1$ on retrouve le cas scalaire). En revanche si on prend $N \rightarrow \infty$ on remarque que seulement une fraction de ces termes contribue à l'ordre dominant.

En effet, intéressons-nous d'abord uniquement au cas des appariements planaires. Ils sont de genre $h = 0$ car ils forment un pavement de la sphère. Ici on a $V=1$ sommet, $E=p$ arrêtes et F faces (y compris la face "extérieure"). On utilise alors la formule d'Euler $\chi = 2 - 2h = 2 = F - E + V \Rightarrow F = p + 1$. Ces diagrammes reçoivent une contribution totale de $\frac{1}{N^p}$ venant des propagateurs ($\frac{1}{N}$ pour chaque propagateur) et une contribution N^{p+1} venant des faces (N pour chaque face). Ainsi chaque diagramme planaire contribue en $\frac{N^{p+1}}{N^p} = N$ à $\langle Tr(M^n) \rangle$ (Pour mieux comprendre, voir Annexe A pour un calcul explicite).

Pour les cartes non planaires il y a au moins 2 faces en moins. En effet $\chi \leq 0 \Rightarrow F \leq E - V = p - 1$ Donc ces cartes contribuent au maximum en $\frac{N^F}{N^p} \leq \frac{1}{N}$. On a donc montré qu'à l'ordre dominant seul les cartes planaires contribuent, il suffit donc de les compter. C'est un exercice classique de combinatoire, on trouve que le nombre de cartes planaires vaut $c_p = \frac{(2p)!}{(p+1)!p!}$ (Voir Annexe B pour la démonstration).

Finalement on trouve :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \langle Tr(M^n) \rangle = \begin{cases} c_p & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (10)$$

2.3 Modèle à une matrice et lien avec la fonction de partition

Appliquons (9) à la fonction $f(M) = \exp\left(N \sum_{i=1}^{\infty} g_i Tr\left(\frac{M^i}{i}\right)\right)$

$$\begin{aligned} Z_N(g_1, g_2, \dots) &= \langle f(M) \rangle \\ &= \left\langle e^{N \sum_{i=1}^{\infty} g_i Tr\left(\frac{M^i}{i}\right)} \right\rangle \\ &= \left\langle \prod_{i=1}^{\infty} e^{\frac{N g_i}{i} Tr(M^i)} \right\rangle \\ &= \left\langle \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{N^{n_i} g_i^{n_i}}{i^{n_i} n_i!} Tr(M^i)^{n_i} \right\rangle \\ &= \sum_{n_1, n_2, \dots \geq 0} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{N^{n_i} g_i^{n_i}}{i^{n_i} n_i!} \left\langle \prod_{i=1}^{\infty} Tr(M^i)^{n_i} \right\rangle \end{aligned}$$

On représente $\prod_i Tr(M^i)^{n_i}$ par une succession de n_i diagrammes en étoiles i -valents puis on somme sur toutes les saturations possibles ce qui forme différents diagrammes en rubans. Et comme précédemment on sait que chaque diagramme contribue en $\frac{N^{F(\Gamma)}}{N^{E(\Gamma)}} = N^{F(\Gamma)-E(\Gamma)}$. Finalement :

$$Z_N(g_1, g_2, \dots) = \sum_{n_1, n_2, \dots \geq 0} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{N^{n_i} g_i^{n_i}}{i^{n_i} n_i!} \sum_{\substack{\Gamma \text{ étiquetés} \\ \text{à } n_i \text{ sommets } i\text{-valents}}} N^{F(\Gamma)-E(\Gamma)} \quad (11)$$

En remplaçant la somme sur les diagrammes étiquetés par une somme sur les diagrammes NON-étiquetés on obtient une annulation partielle du préfacteur $\prod_i \frac{1}{i^{n_i} n_i!}$ qui laisse un terme $\frac{1}{|Aut(\Gamma)|}$ (on admet ce résultat). Ainsi en sachant que

$$\sum_{n_1, n_2, \dots} \sum_{\substack{\Gamma \text{ étiquetés} \\ \text{à } n_i \text{ sommets } i\text{-valents}}} = \sum_{\Gamma} \text{et } V(\Gamma) = \sum_i n_i(\Gamma)$$

on obtient :

$$Z_N(g_1, g_2, \dots) = \sum_{\Gamma} \frac{N^{V(\Gamma)-E(\Gamma)+F(\Gamma)}}{|Aut(\Gamma)|} \prod_{i \geq 1} g_i^{n_i(\Gamma)} \quad (12)$$

On souhaite obtenir un espace connexe. Pour cela il faut se limiter aux graphes connexes, on utilise alors un résultat connu de théorie des champs qui dit que la somme sur les graphes connexes s'obtient en prenant le logarithme népérien de la somme sur tout les graphes (cela revient à calculer l'énergie libre du modèle de matrice à partir de la fonction de partition) :

$$F_N(g_1, g_2, \dots) = \text{Log} Z_N(g_1, g_2, \dots) = \sum_{\Gamma \text{ connexes}} \frac{N^{2-2h}}{|Aut(\Gamma)|} \prod_{i \geq 1} g_i^{n_i(\Gamma)} \quad (13)$$

Cette équation nous dit que l'on peut identifier $\langle f(M) \rangle$ comme une somme discrète sur toutes les configurations de surfaces pavées de genre arbitraire. En effet, cette somme s'opère sur des diagrammes Γ qui sont duaux à des pavements Γ^* d'une surface de Riemann de même genre par n_i pavés polygonaux i -valents.

Prenons par exemple $g_i = \begin{cases} g & \text{si } i = 4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(13) devient alors une somme sur les diagrammes en rubans à sommets 4-valents, ces derniers étant alors duaux à une quadrangulation Q de surfaces de Riemann de genre arbitraire. On suppose que l'aire des quadrangles est unitaire ainsi $n_4(\Gamma) = A(Q)$ est l'aire totale de la quadrangulation Q . Ainsi :

$$F_N(g) = \sum_{Q \text{ connexes}} \frac{g^{A(Q)} N^{2-2h}}{|Aut(Q)|} \quad (14)$$

En posant $g = e^{-\Lambda}$ et $N = e^{-\gamma}$ on peut formellement identifier notre fonction de partition (2) de gravité quantique en 2D avec l'énergie libre (14) du modèle à une matrice.

On peut se demander à quoi correspondent d'autres valeurs de g_i . Elles correspondent à des modèles plus élaborés, par exemple des modèles de gravité couplée à de la matière.

3 Calcul de la fonction de partition

Nous avons formellement identifié la fonction de partition de gravité quantique 2D avec l'énergie libre du modèle d'intégrale à une matrice. Nous allons maintenant voir deux méthodes pour mener le calcul effectif de la fonction de partition : la méthode du col et la méthode des polynômes orthogonaux.

3.1 Méthode du col

On souhaite calculer $Z_N(V) = \int dM e^{-NT \text{Tr} V(M)}$ avec $V(x) = x^2/2 - \sum_{i=1}^d g_i x^i / i$. On va admettre que par un changement de variable judicieux on peut réexprimer la fonction de partition comme :

$$Z_N(V) = \int_{\mathbb{R}^N} dm_1 \dots dm_N \Delta(m)^2 e^{-N \sum_{i=1}^N V(m_i)} \quad (15)$$

avec $\Delta(m) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (m_i - m_j)$ le déterminant de Vandermonde. Ce qui nous permet d'écrire :

$$Z_N(V) = \int_{\mathbb{R}} dm_1 \dots dm_N e^{-N^2 S(m_1, \dots, m_N)} \quad (16)$$

avec $S(m_1, \dots, m_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V(m_i) - \frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} \text{Log}|m_i - m_j|$

Démonstration :

$$\Delta(m)^2 e^{-N \sum_{i=1}^N V(m_i)} = e^{-N^2 S(m_1, \dots, m_N)}$$

$$\Rightarrow S(m_1, \dots, m_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V(m_i) - \frac{1}{N^2} \text{Log} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (m_i - m_j)^2$$

Or

$$\begin{aligned} \text{Log} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (m_i - m_j)^2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} \text{Log}((m_i - m_j)^2) \\ &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \text{Log}(\sqrt{(m_i - m_j)^2}) \\ &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \text{Log}|m_i - m_j| \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} \text{Log}|m_i - m_j| + \sum_{1 \leq j < i \leq N} \text{Log}|m_i - m_j| \end{aligned}$$

$$= \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} \text{Log}|m_i - m_j|$$

La méthode du col consiste à dire que lorsque $N \rightarrow \infty$ (16) est dominé par les minima de S (à cause de l'exponentielle).

$$\text{Ainsi : } \frac{\partial S}{\partial m_k} = 0 \Rightarrow \frac{1}{N} V'(m_k) - \frac{1}{N^2} \frac{\partial}{\partial m_k} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} \text{Log}|m_i - m_j| = 0$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m_k} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} \text{Log}|m_i - m_j| &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq N \\ \neq k}} \frac{\partial}{\partial m_k} \text{Log}|m_i - m_k| + \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ \neq k}} \frac{\partial}{\partial m_k} \text{Log}|m_k - m_j| \\ &= 2 \sum_{\substack{1 \leq i \leq N \\ \neq k}} \frac{\partial}{\partial m_k} \text{Log}|m_i - m_k| \end{aligned}$$

$$1) \text{ Si } m_i > m_k \text{ alors } \frac{\partial}{\partial m_k} \text{Log}(m_i - m_k) = \frac{1}{m_k - m_i}$$

$$2) \text{ Si } m_i < m_k \text{ alors } \frac{\partial}{\partial m_k} \text{Log}(m_k - m_i) = \frac{1}{m_k - m_i}$$

$$\text{Ainsi : } \frac{1}{N} V'(m_k) - \frac{2}{N^2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq N \\ \neq k}} \frac{1}{m_k - m_i} = 0$$

$$\Rightarrow V'(m_k) = \frac{2}{N} \sum_{\substack{1 \leq i \leq N \\ \neq k}} \frac{1}{m_k - m_i} \quad (17)$$

On introduit la résolvante $\omega_N(z) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{z - m_i}$. Ensuite on multiplie (17) par $\frac{1}{N(z - m_i)}$ puis on somme sur j ce qui donne (voir Annexe C pour la démonstration) :

$$V'(z)\omega_N(z) + \sum_{j=1}^N \frac{V'(m_j) - V'(z)}{N(z - m_j)} = \omega_N(z)^2 + \frac{1}{N} \omega_N(z)' \quad (18)$$

On suppose que $\lim_{N \rightarrow \infty} \omega_N(z) = \omega(z)$ avec ω dérivable, par conséquent lorsque $N \rightarrow \infty$

$$\omega(z)^2 - V'(z)\omega(z) + P(z) = 0 \quad (19)$$

avec $P(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{V'(z) - V'(m_j)}{z - m_j}$ polynôme de degré $d - 2$. On introduit alors la

densité de distribution de valeurs propres $\rho(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(z - m_j)$ normalisé par $\int_{\mathbb{R}} \rho(z) dz = 1$. On peut alors exprimer $\omega(z)$ en fonction de $\rho(z)$:

$$\omega(z) = \int \frac{\rho(x)}{z - x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{\rho(x)}{z(1-x/z)} dx \\
&= \int \frac{\rho(x)}{z} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x}{z}\right)^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{z^{m+1}} \int x^m \rho(x) dx \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{z^m} \int x^{m-1} \rho(x) dx
\end{aligned}$$

pour z suffisamment grand. On va de plus admettre que l'on peut exprimer ρ en fonction de ω grâce à

$$\rho(z) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\omega(z+i\epsilon) - \omega(z-i\epsilon)] \quad (20)$$

En résolvant (19) on trouve que $\omega(z) = \frac{V'(z) \pm \sqrt{(V'(z))^2 - 4P(z)}}{2}$. (on garde le signe - car $\omega(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{z}$).

Déterminer le polynôme P est difficile pour un potentiel quelconque et ces calculs sont en dehors du cadre de ce stage. En revanche on peut malgré tout tenter de déterminer la résolvante ω_0 et la densité ρ_0 dans le cas simple d'un potentiel gaussien.

On a donc $V = \frac{x^2}{2} \Rightarrow P(z) = 1 \Rightarrow \omega_0(z) = \frac{1}{2}(z - \sqrt{z^2 - 4})$

En appliquant (20) on trouve que $\rho_0(z) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - z^2}$ (voir Annexe D pour la démonstration).

En développant ω_0 en série comme avec les nombres de Catalan on peut identifier les coefficients pour obtenir :

$$\int_{\mathbb{R}} x^n \rho_0(x) dx = \begin{cases} c_p & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (21)$$

Pour retrouver l'expression de la fonction de partition de la gravité quantique 2D on pourra utiliser l'équation (2.12) de [2].

3.2 Polynômes orthogonaux

Pour calculer Z on peut utiliser une autre méthode. On repart de (15) mais cette fois-ci on réexprime le déterminant de Vandermonde de la façon suivante :

$$\Delta(m) = \det(m_i^{j-1})_{1 \leq i < j \leq N} = \begin{vmatrix} 1 & m_1 & \cdots & m_1^{N-1} \\ 1 & m_2 & \cdots & m_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & m_N & \cdots & m_N^{N-1} \end{vmatrix} = \det(p_{j-1}(m_i))_{1 \leq i < j \leq N}$$

Avec p_m des polynômes unitaires orthogonaux par rapport à la mesure

$d\mu(x) = e^{-NV(x)}dx$ et avec $\deg(p_m) \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$ c'est-à-dire :

$$(p_m, p_n) = \int_{\mathbb{R}} p_m(x)p_n(x)d\mu(x) = h_m\delta_{m,n}$$

On utilise cette relation pour réécrire Z :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} dm_1 \dots dm_N \Delta(m)^2 e^{-N \sum_{i=1}^N V(m_i)} &= \int_{\mathbb{R}^N} dm_1 \dots dm_N (\det(p_{j-1}(m_i))_{1 \leq i, j \leq N})^2 e^{-N \sum_{i=1}^N V(m_i)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} dm_1 \dots dm_N \left(\sum_{\sigma, \tau \in S_N} \epsilon(\sigma\tau) \prod_{i=1}^N p_{\sigma(i)-1}(m_i) p_{\tau(i)-1}(m_i) \right) e^{-N \sum_{i=1}^N V(m_i)} \\ &= \sum_{\sigma, \tau} \epsilon(\sigma\tau) \prod_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}} dm_i p_{\sigma(i)-1}(m_i) p_{\tau(i)-1}(m_i) e^{-NV(m_i)} \\ &= \sum_{\sigma, \tau} \epsilon(\sigma\tau) \prod_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}} d\mu(m_i) p_{\sigma(i)-1}(m_i) p_{\tau(i)-1}(m_i) \\ &= \sum_{\sigma, \tau} \epsilon(\sigma\tau) \prod_{i=1}^N (p_{\sigma(i)-1}, p_{\tau(i)-1}) \\ &= \sum_{\sigma} \underbrace{\epsilon(\sigma^2)}_{=1} \prod_{i=1}^N (p_{\sigma(i)-1}, p_{\sigma(i)-1}) \\ &= N! \prod_{i=1}^N (p_{i-1}, p_{i-1}) = N! \prod_{i=0}^{N-1} h_i \end{aligned}$$

On voit donc que la norme des polynômes orthogonaux détermine entièrement la fonction de partition :

$$Z_N(V) = N! \prod_{i=0}^{N-1} h_i \quad (22)$$

Comment calculer les h_i ? Introduisons l'opérateur Q tel que $Qp_m(x) = xp_m(x)$.

Les p_m formant une base de l'espace des polynômes, on a :

$$xp_m(x) = \sum_{i=0}^{m+1} a_i p_i(x) \text{ avec } a_i = h_i^{-1} \int e^{-V} p_m(x) x p_i(x).$$

On obtient alors la relation de récurrence :

$$xp_m(x) = p_{m+1}(x) + s_m p_m(x) + r_m p_{m-1}(x) \quad (23)$$

On obtient cette relation en remarquant que les termes proportionnels à p_i pour $i < m+1$ s'annulent car $\int e^{-V} p_m x p_i = 0$ (par orthogonalité car $x p_i$ est au maximum

de degré $i + 1$ donc orthogonal à p_m pour $i + 1 < m$). De plus, en prenant un potentiel V pair on a $s_m = 0$ car $\int e^{-V} x p_m(x)^2 = 0$. On va appliquer l'opérateur Q successivement à p_m et p_{m-1} dans l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \int e^{-V} p_m x p_{m-1} &= \int e^{-V} (p_{m+1}(x) + r_m p_{m-1}(x)) p_{m-1}(x) \\ &= \underbrace{\int e^{-V} p_{m+1}(x) p_{m-1}(x)}_{=0} + \int e^{-V} r_m p_{m-1}(x)^2 \\ &= r_m h_{m-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int e^{-V} p_m x p_{m-1} &= \int e^{-V} p_m(x) (p_m(x) + r_{m-1} p_{m-2}(x)) \\ &= \int e^{-V} r_m p_m(x)^2 + \underbrace{\int e^{-V} p_m(x) p_{m-2}(x)}_{=0} \\ &= h_m \end{aligned}$$

Conclusion : $r_m = \frac{h_m}{h_{m-1}}$.

On voit donc que déterminer les r_m permet de déterminer les h_m . Afin de pouvoir déterminer les r_m , étudions $\int e^{-V} p'_m p_{m-1} : p'_m = m p_{m-1} + O(x^{m-2}) \Rightarrow \int e^{-V} p'_m p_{m-1} = m \int e^{-V} p_{m-1}^2 + \underbrace{\dots}_{=0} = m h_{m-1}$

mais on peut également intégrer par parties :

$$\begin{aligned} \int e^{-V} p'_m p_{m-1} &= \underbrace{[e^{-V} p_m p_{m-1}]}_{=0} - \int p_m \frac{d}{dx} (e^{-V} p_{m-1}) \\ &= - \underbrace{\int p_m p'_{m-1} e^{-V}}_{=0} + \int p_m p_{m-1} V' e^{-V} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$m h_{m-1} = \int p_m p_{m-1} V' e^{-V} \quad (24)$$

C'est cette relation qui va nous permettre de calculer les r_m .

On va utiliser la méthode des polynômes orthogonaux pour déterminer la fonction de partition dans le cas d'un potentiel quartique $V(x) = \frac{N}{2}(x^2 + bx^4)$

Ainsi $m h_{m-1} = N \int p_m p_{m-1} V' e^{-V} \Rightarrow \frac{m}{N} h_{m-1} = \int x p_m p_{m-1} e^{-V} + 2b \int p_m p_{m-1} x^3 e^{-V}$

Le calcul donne (voir Annexe E pour la démonstration) :

$$\frac{m}{N} = r_m + 2b r_m (r_{m+1} + r_m + r_{m-1}) \quad (25)$$

Lorsque $N \rightarrow \infty$ la variable $\xi = m/N$ devient continue et prend valeur dans l'intervalle $[0, 1]$, de plus $r_m \rightarrow r(\xi)$. Ainsi $6br^2 + r - \xi = 0$

$$\Rightarrow r = \frac{-1 + \sqrt{1 + 24b\xi}}{12b} \quad (26)$$

(On garde le signe $+$ en regardant la limite $b \rightarrow 0$). Rappelons que :

$$Z = N! \prod_{i=0}^{N-1} h_i = N! r_0^N \prod_{m=1}^{N-1} r_m^{N-m} \quad (27)$$

en vertu de la relation : $r_m = \frac{h_m}{h_{m-1}}$.

Dans toute la suite, nous allons ignorer les constantes additives, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^2} \text{Log}(Z) &= \frac{1}{N^2} \text{Log}\left(\prod_{m=1}^{N-1} r_m^{N-m}\right) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^{N-1} \text{Log}(r_m^{N-m}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N-1} (1 - m/N) \text{Log}(r_m) \end{aligned}$$

On trouve ainsi que dans la limite planaire :

$$\frac{1}{N^2} \text{Log}(Z) = \int_0^1 d\xi (1 - \xi) \text{Log}(r(\xi)) \quad (28)$$

On développe le Log et on ne conserve que son terme le plus singulier qui provient de la singularité de $r(\xi)$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^2} Z &\sim \int_0^1 d\xi (1 - \xi) (1 + 24b\xi)^{\frac{1}{2}} \\ &\sim \int_0^1 (1 + 24b\xi)^{\frac{1}{2}} d\xi - \int_0^1 \xi (1 + 24b\xi)^{\frac{1}{2}} d\xi \\ &\sim \left[\frac{(1 + 24b\xi)^{\frac{3}{2}}}{36b} \right]_0^1 - \left(\left[\frac{\xi(1 + 24b\xi)^{\frac{3}{2}}}{36b} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(1 + 24b\xi)^{\frac{3}{2}}}{36b} d\xi \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sim \frac{(1+24b)^{\frac{3}{2}}}{36b} - \frac{1}{36b} - \frac{(1+24b)^{\frac{3}{2}}}{36b} + \left[\frac{(1+24b\xi)^{\frac{5}{2}}}{2160b^2} \right]_0^1 \\
&\sim \frac{(1+24b)^{\frac{5}{2}}}{2160b^2} - \frac{1}{36b} - \frac{1}{2160b^2} \\
&\sim \frac{4(1+24b)^{\frac{5}{2}}}{15} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5} b^n \left(2^{2+3n} \times 3^{-1+n} \binom{\frac{5}{2}}{n} \right) \text{ pour } |b| < \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

dans la limite continue $b \rightarrow -\frac{1}{24}$.

Ce développement asymptotique fait apparaître un exposant $\frac{5}{2}$, appelé exposant critique, qui ne dépend pas des détails microscopiques, c'est-à-dire du type de triangulation. C'est cohérent car on souhaite obtenir le même comportement dans la limite continue indépendamment du choix de la discrétisation. On dit que tous ces modèles appartiennent à la même "classe d'universalité", qui décrit la gravité pure.

4 Conclusion

Nous avons étudié un modèle de gravité quantique en 2 dimensions grâce aux matrices aléatoires. On peut évoquer le fait que des recherches sur des modèles en dimensions supérieures sont faites de nos jours utilisant des tenseurs aléatoires. Par ailleurs, les matrices aléatoires sont également utilisées dans de nombreux autres domaines de la physique et des sciences en générales, on pourrait citer par exemple la théorie des cordes, les systèmes intégrables, la théorie des nombres, les télécommunications, la biologie, etc...

Sur le plan personnel, après avoir fait un stage en physique nucléaire expérimentale dans le cadre du TIPE de prépa, je souhaitais utiliser cette opportunité en L3 pour faire un stage théorique, domaine dans lequel je souhaite poursuivre mes études.

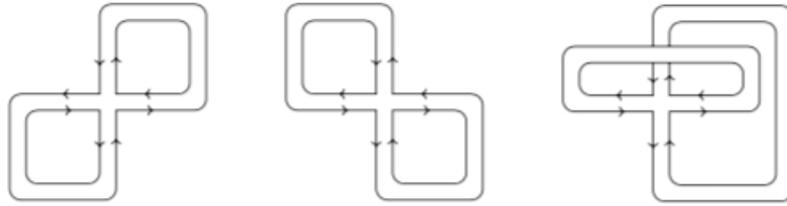
J'ai notamment pu être confronté aux aspects très mathématiques du domaine ce qui m'a beaucoup plu car j'ai pu y découvrir de très élégants raisonnements. J'ai également pu discuter avec M. Bonzom de son expérience en tant que chercheur ce qui m'a également fait mûrir dans mes choix de carrière pour le futur.

A Calcul explicite de $\langle Tr(M^4) \rangle$

Afin de mieux comprendre l'interprétation graphique du calcul, on va effectuer le calcul explicite pour l'exemple $\langle Tr(M^4) \rangle$. D'après le théorème de Wick :

$$\begin{aligned} \langle Tr(M^4) \rangle &= \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4} \langle M_{i_1 i_2} M_{i_2 i_3} \rangle \langle M_{i_3 i_4} M_{i_4 i_1} \rangle \\ &+ \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4} \langle M_{i_1 i_2} M_{i_4 i_1} \rangle \langle M_{i_2 i_3} M_{i_3 i_4} \rangle \\ &+ \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4} \langle M_{i_1 i_2} M_{i_3 i_4} \rangle \langle M_{i_2 i_3} M_{i_4 i_1} \rangle \end{aligned}$$

Chaque terme correspond à une saturation de l'étoile $\langle Tr(M^4) \rangle$, il y en a 3 :



On peut tout de suite remarquer que les deux premiers sont planaires et donc de genre 0 et que le troisième est de genre 1. Ainsi :

$$\begin{aligned} \langle Tr(M^4) \rangle &= \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i_1, i_2, i_3, i_4} \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_3 i_1} + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4} \delta_{i_2 i_4} \delta_{i_4 i_2} + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4} \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \right) \\ &= \frac{1}{N^2} (N^3 + N^3 + N) \\ &= N + N + \frac{1}{N} \end{aligned}$$

Finalement, on retrouve bien le fait que les deux premiers termes, dont les diagrammes sont planaires, contribuent en N alors que le troisième terme dont le diagramme est de genre 1 ne contribue qu'en $1/N$.

B Nombres de Catalan

Pour déterminer le nombre c_p de cartes planaires différentes on peut exploiter une relation de récurrence. Supposons qu'il y ait $2p$ demi-arêtes, on peut alors relier la première demi-arête avec la demi-arête à la position $2j$ (avec $j = 1, 2, \dots, p$) on peut remarquer qu'il est possible de créer c_{j-1} cartes planaires à l'intérieur de

l'arête ainsi que c_{p-j} à l'extérieur de l'arête. En sommant sur les différentes façon de choisir j on obtient :

$$c_p = \sum_{j=1}^p c_{j-1}c_{p-j} \quad (29)$$

avec $c_0 = 1$. On va préférer écrire $c_p = \sum_{j=0}^{p-1} c_j c_{p-j-1}$.

Considérons la fonction génératrice des nombres de Catalan :

$$\begin{aligned} C(x) &= \sum_{p=0}^{\infty} c_p x^p \\ &= 1 + \sum_{p=1}^{\infty} c_p x^p \\ &= 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{p-1} c_j c_{p-j-1} x^p \\ &= 1 + x \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{p-1} c_j c_{p-j-1} x^{p-1} \\ &= 1 + x \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^p c_j c_{p-j} x^p \text{ (On reconnaît un produit de Cauchy)} \\ &= 1 + x \left(\sum_{p=0}^{\infty} c_p x^p \right)^2 \\ &= 1 + x C(x)^2 \end{aligned}$$

Conclusion : $C(x) = 1 + xC(x)^2 \Rightarrow C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$. On sait qu'il faut $C(0) = c_0 = 1$ donc on garde le signe -. On développe alors C en série de Taylor :

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^n (2n-1)} \binom{2n}{n} (-4x)^n \\ &= \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} x^n \\ &= \frac{1}{2x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2(2n-1)} \binom{2n}{n} x^{n-1} \\ &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(2n-1)} \binom{2n}{n} x^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2(2n+1)} \binom{2(n+1)}{n+1} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2(2n+1)} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2)(2n)!}{2(n+1)!^2}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$C(x) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p x^p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p)!}{(p+1)!p!} x^p \quad (30)$$

En identifiant les coefficients on aboutit bien à :

$$c_p = \frac{(2p)!}{(p+1)!p!} \quad (31)$$

C Démonstration de (18)

Pour le premier membre :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N \frac{V'(m_j) + V'(z) - V'(z)}{N(z - m_j)} &= \sum_{j=1}^N \frac{V'(z)}{N(z - m_j)} + \sum_{j=1}^N \frac{V'(m_j) - V'(z)}{N(z - m_j)} \\
&= V'(z)\omega_N(z) + \sum_{j=1}^N \frac{V'(m_j) - V'(z)}{N(z - m_j)}
\end{aligned}$$

Pour le second membre :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^N \frac{1}{N^2(z - m_j)} \sum_{\substack{1 \leq i \leq N \\ \neq j}} \frac{1}{m_j - m_i} - \sum_{i=1}^N \frac{1}{N^2(z - m_i)} \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ \neq i}} \frac{1}{m_j - m_i} \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} \frac{1}{m_j - m_i} \left(\frac{1}{z - m_j} - \frac{1}{z - m_i} \right) \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} \frac{1}{(z - m_j)(z - m_i)} \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq i, j \leq N} \frac{1}{(z - m_j)(z - m_i)} - \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \frac{1}{(z - m_j)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{z - m_i} \right) \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{z - m_j} \right) - \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \frac{1}{(z - m_j)^2} \\
&= \omega_N(z)^2 + \frac{1}{N} \omega'(z)
\end{aligned}$$

D Densité de distribution de valeurs propres dans la cas gaussien

On applique (20) mais pour avoir une distribution non triviale il faut prendre $z \in [-2, 2]$.

$$\begin{aligned}
\rho_0(z) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4i\pi} (z + i\epsilon - \sqrt{(z + i\epsilon)^2 - 4} - (z - i\epsilon - \sqrt{(z - i\epsilon)^2 - 4})) \\
&= \frac{1}{4i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (2i\epsilon + \sqrt{(z - i\epsilon)^2 - 4} - \sqrt{(z + i\epsilon)^2 - 4}) \\
&= \underbrace{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{2\pi}}_{=0} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4i\pi} (\sqrt{(z - i\epsilon)^2 - 4} - \sqrt{(z + i\epsilon)^2 - 4}) \\
&= \frac{1}{4i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[e^{\frac{1}{2} \text{Log}((z - i\epsilon)^2 - 4)} - e^{\frac{1}{2} \text{Log}((z + i\epsilon)^2 - 4)} \right] \\
&= \frac{1}{4i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[e^{\frac{1}{2} (\ln|(z - i\epsilon)^2 - 4| + i \arg((z - i\epsilon)^2 - 4))} - e^{\frac{1}{2} (\ln|(z + i\epsilon)^2 - 4| + i \arg((z + i\epsilon)^2 - 4))} \right] \\
&= \frac{1}{4i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{\frac{1}{2} \ln|(z - i\epsilon)^2 - 4|} \left[e^{\frac{i}{2} \arg((z - i\epsilon)^2 - 4)} - e^{\frac{i}{2} \arg((z + i\epsilon)^2 - 4)} \right] \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2} \ln(|z^2 - 4|)}}{4i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[e^{\frac{i}{2} \arg((z - i\epsilon)^2 - 4)} - e^{-\frac{i}{2} \arg((z - i\epsilon)^2 - 4)} \right] \\
&= \frac{\sqrt{4 - z^2}}{4i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2i \sin(\arg(z^2 - \epsilon^2 - 4 - 2iz\epsilon)/2) \\
&= \frac{\sqrt{4 - z^2}}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{4 - z^2}}{2\pi}
\end{aligned}$$

E Demonstration de (25)

$$mh_{m-1} = \int x p_m p_{m-1} e^{-V} + 2b \int x^3 p_m p_{m-1} e^{-V}$$

$$\begin{aligned}
&= \int (p_{m+1} + r_m p_{m-1}) p_{m-1} e^{-V} + 2b \int x^2 (p_{m+1} + r_m p_{m-1}) p_{m-1} e^{-V} \\
&= r_m h_{m-1} + 2b \int x^2 p_{m+1} p_{m-1} e^{-V} + 2b \int x^2 r_m p_{m-1}^2 e^{-V} \\
&= r_m h_{m-1} + 2b \int x (p_{m+2} + r_{m+1} p_m) p_{m-1} e^{-V} + 2b \int x r_m (p_m + r_{m-1} p_{m-2}) p_{m-1} \\
&= r_m h_{m-1} + 2b \int x r_{m+1} p_m p_{m-1} e^{-V} + 2b \int x r_m p_m p_{m-1} e^{-V} + 2b \int x r_m r_{m-1} p_{m-2} p_{m-1} e^{-V} \\
&= r_m h_{m-1} + 2b \int r_m r_{m+1} p_{m-1}^2 e^{-V} + 2b \int r_m^2 p_{m-1}^2 e^{-V} + 2b \int r_m r_{m-1} p_{m-1}^2 e^{-V} \\
&= r_m h_{m-1} + 2b r_m (r_{m+1} + r_m + r_{m-1}) h_{m-1}
\end{aligned}$$

Références

- [1] P. Di Francesco, 2D Quantum Gravity, *Matrix Models and Graph Combinatorics*, (2004).
- [2] P. Di Francesco, P. Ginsparg and J. Zinn-Justin, *2D Gravity and Random Matrices*, Physics Reports 254 (1995).
- [3] Bertrand Eynard, Taro Kimura and Sylvain Ribault, *Random matrices*, (2015).