INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLE STRINGHE

a.a. 2003/2004

prof. Augusto SAGNOTTI

Appunti raccolti e redatti
da Giovanni Ricco

Questi appunti, raccolti e redatti da Giovanni Ricco, riassumono il contenuto delle lezioni sulla teoria delle Stringhe che ho tenuto a Tor Vergata nel secondo semestre dell'anno accademico 2003-2004. Nello stesso anno accademico avevo tenuto un simile corso di lezioni, forse in modo più ordinato e meno perturbato da altre attività professionali, alla Scuola Normale Superiore di Pisa. Vorrei ringraziare anzitutto Giovanni ricco per il lavoro fatto su questi appunti, che metto volentieri a disposizione di quanto siano interessati a farne uso. Vorrei inoltre ringraziare Riccardo Barbieri per il cortese invito a tenere queste lezioni alla Scuola Normale.

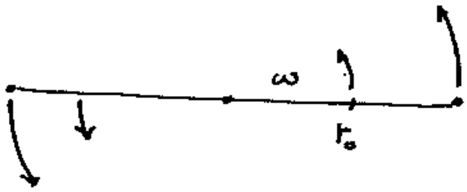
Tor Vergata, novembre 2004 Augusto Sagnotti

Introduzione alla Teoria delle Stringhe

INDICE:

1.3 Un argomento classico sulle corde

Supponiamo di avere una corda ruotante intorno ad un asse perpendicolare al centro. E calcoliamo la massa relativistica osservata.
Poniamo che l'estremo della corda ruoti con velocita' c, e ρ_0 sia la densita' a riposo.



$$M = 2\int_0^{r_0} dr \, \frac{\rho_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$J = 2\int_0^{r_0} dr \, \frac{\rho_0 v r}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

(il 2 è dovuto al fatto che il segmento va da $(-r_0)$ a r_0)

La corda si muove di moto circolare uniforme, quindi i vari punti si muovono con velocita' proporzionale alla loro distanza dall'origine

$$v = c\cdot\frac{r}{r_0}$$

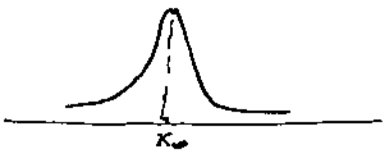
$$M = 2\rho\int_0^{r_0} \frac{dr \; r_0/r_0}{\sqrt{1-(r/r_0)^2}} = 2\rho r_0 \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{\pi/2} = \pi\rho_0 r_0$$

Più propriamente si tratta di "risonanze" (piuttosto che particelle) in quanto oggetti con vita media molto breve.
Facendo esperienze di scattering, se si ottengono come stati intermedi oggetti vicini alla mass-shell di queste particelle i diagrammi vengono dominati da

$$\frac{1}{p^2+m^2}$$

m^2 non è propriamente reale, c'è una componente immaginaria che è legata all'instabilità dello stato e al tempo di vita media. Quando p^2 è sulla mass shell questa funzione non esplode come farebbe per uno stato stabile, cioè con $m^2 \in \mathbb{R}$, ma descrive una Lorentziana, cioè una funzione del tipo

$$\frac{1}{(x-x_0)^2+\alpha^2}$$



La larghezza del picco dà informazioni sulla lunghezza della vita media. Più è largo il picco più sarà breve la vita media. Questo è legato alle relazioni di indeterminazione:

$$\Delta E \cdot \tau \simeq \hbar$$

Storicamente si è notato che le "risonanze" si andavano a disporre lungo le traiettorie di Regge.
Si può vedere con un argomento classico, che questo tipo di struttura emerge in maniera semplice se pensiamo le particelle come stati eccitati di una corda vibrante.

Negli anni '60 si è quindi ipotizzato che gli adroni fossero stati eccitati di oggetti estesi.

Questa struttura è evidente dal punto di vista fenomenologico, ma non è del tutto spiegata teoricamente.

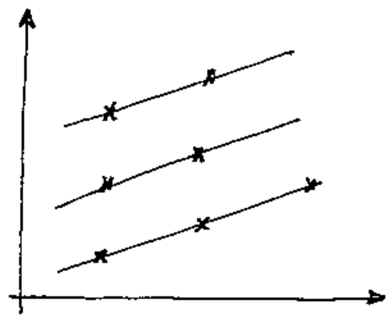
Le generazioni devono essere intere perchè ci sono dei vincoli legati alla preservazione di alcune simmetrie, e quindi all'esistenza di correnti conservate, che altrimenti sarebbero violate.
Per esempio in questo modo, per conservate alcune simm. della teo classica si è predetto l'esistenza del quark top.

Non c'è però nessun motivo che impone l'esistenza delle diverse generazioni di quark. C'è solo un argomento che dovrebbe limitare superiormente il n° delle generazioni: se ci sono troppi quarks cambiano le caratteristiche del vuoto e l'interazione forte non è più asintoticamente libera come dovrebbe essere.

Accanto alla simm. "cinematica" c'è uno strano comportamento degli adroni di natura "dinamica."

1.2. Traiettorie di Regge

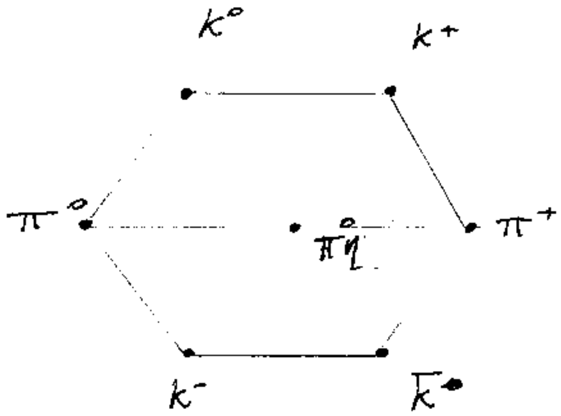
Quello che succede è che le particelle si presentano in serie teoricamente infinite di particelle con stessi numeri quantici ma con spin e masse crescenti in modo regolare.
Le particelle si vanno cioè a disporre lungo traiettorie rettilinee dette "traiettorie di Regge".



1. LE ORIGINI DEI MODELLI DUALI

1.1. Ottetto dei mesoni pseudoscalari

Una prima indicazione dell'esistenza di una "struttura" interessante nella fisica adronica viene osservando i "multipletti adronici". Ad esempio l'ottetto dei mesoni pseudoscalari



Queste 8 particelle sono quasi degeneri in massa, non completamente perché mentre le particelle lungo la retta centrale coinvolgono solo i quark up e down che sono quasi degeneri in massa ($\pi^0 : u\bar{u}$, $\pi^+ : u\bar{d}$) invece i Kaoni contengono il quark s che è più massivo. I kaoni quindi non sono esattamente degeneri in massa, hanno massa maggiore

Questo indica, dal punto di vista fenomenologico che esiste una struttura "cinematica" che indica che i quarks vanno a ripetersi.

allo stesso modo

$$J = 8\rho r_0^2 c \underbrace{\int_0^1 dx \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}_{\pi/4} = \frac{\pi}{2}\rho_0 r_0^2 c$$

r_0 non è un parametro fisicamente accessibile, ma viene eliminato dividendo J per M^2

$$\frac{J}{M^2} = \frac{\frac{\pi}{2}\rho_0 r_0^2 c}{\pi^2\rho^2 r_0^2} = \frac{c}{2\pi\rho}$$

dividendo J per $\hbar$ si ha sostanzialmente un rapporto spin / massa^2

$$\frac{J/\hbar}{M^2} = \frac{c}{2\pi\hbar\rho} = \alpha'$$ "Regge's slope" (pendenza di Regge)

<u>Nota</u> : " unità $\hbar = c = 1$ "

$[\hbar] = L^2 M T^{-1}$

$[c] = L T^{-1}$

$[\hbar c] = E \cdot L$

Se si usano unità $\hbar = c = 1$, per avere grandezze corrette dimensionalmente si devono inserire nelle formule finali le giuste potenze di $\hbar$ e c che raggiustino le dimensioni.

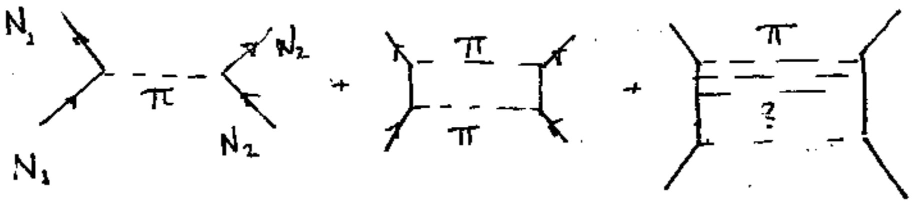
Si è trovata una relazione di proporzionalità fra J e M^2, è una relazione classica e quindi continua. Ci si aspetta che facendo un calcolo quantistico le traiettorie trovate vengono "discretizzate".

1.4. Processi d'urto e matrice S

Negli anni '40 e '50 si era capita la QED, generalizzazione della meccanica quantistica con un numero infinito di gradi di libertà: teo. dei campi quantistici.
Le teo. dei campi presentano molti problemi tecnici e concettuali. Uno di questi è ad esempio l'energia di punto zero che è infinita e va rinormalizzata.
Lo studio della dinamica è poi solo possibile in teo. delle perturbazioni

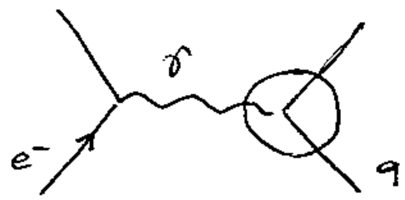
In QED la costante d'accoppiamento è dell'ordine $\alpha \sim \frac{1}{100}$, ($\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$) quindi i processi significativi sono quelli con poche interazioni. L'approssimazione di particella libera sarà quindi buona.
Per int. forti questa approssimazione è cattiva. I processi di scattering nucleone - nucleone è di ordine 1, ma si tratta in un certo senso di un sistema complicato "ad interazioni residue" (come nel caso delle forze di Van der Walls).

Quello che si faceva era modellizzare lo scattering nucleone - nucleone con lo scambio di π. Il coefficiente nei vertici di emissione di π è pari a 1, quindi non c'è come in QED un processo in cui l'ordine di scambio dominante è per emissione di 1 sola particella (il fotone).
Non è quindi possibile un trattamento perturbativo.



[sono tutti dello stesso ordine]

Negli anni '60 Gell-Mann propose l'esistenza dei quarks per interpretare le ricorrenze degli adroni.
Alla fine degli anni '60 a SLAC gli esperimenti di "deep inelastic scatter" e^- su adroni mostrarono la struttura a "partoni".



Il calcolo della distribuzione angolare dei frammenti (della sezione d'urto differenziale) risulta molto preciso assumendo che i quarks siano liberi all'interno dell'adrone (Feyman, Bjorken). I componenti furono chiamati "partoni".

Si pensò di descrivere i processi di scattering tramite la matrice S: dati gli stati iniziali e finali di un processo la matrice S è l'ampiezza di probabilità associata $\langle f \mid i \rangle$

1.5. Ampiezza di Veneziano

Un esempio di matrice S fu proposto da Gabriele Veneziano ('68)

$$B(s,t) = \int_0^1 dx\, x^{s-1} (1-x)^{t-1} = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$

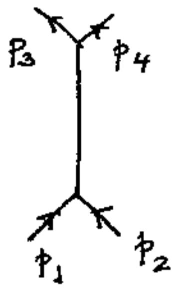
confrontiamo questa ampiezza con qualcosa di semplice, consideriamo una teoria:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{3!} \phi^3$$

[si considera una segnatura $(-,+,+,+)$]

consideriamone le ampiezze a 4 punti

(I)



(II)

vertice  $i\lambda$

propagatore $\dfrac{i}{p^2 + m^2}$

consideriamo il diagramma (II)

$$\sim \frac{\lambda^2}{(p_1+p_2)^2+m^2+i\epsilon}$$

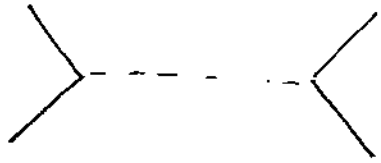
quando $(p_1+p_2)^2$ è su mass shell questa funzione ha un polo

$$-(E_1+E_2)^2+(\vec{p}_1+\vec{p}_2)^2+m^2=0 \qquad (\text{on mass shell})$$

Chiaramente questo è un calcolo in teo. delle perturbazioni e stiamo considerando il primo ordine, con quindi una sola particella intermedia, compare, per questo, un polo. Un calcolo completo mostrerebbe un polo nella massa della p. scambiata più un taglio per $E \geq 4m_\pi^2$

Complichiamo un po' la teoria considerando lo scambio di particelle di spin più alto (vettori, tensori...)

$$\phi^3 \longrightarrow \phi^2 \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu}$$



facendo la T.F. mi aspetto che al numeratore del propagatore compaia un numero di impulsi proporzionale all'ordine dello spin della particella scambiata.

$$\frac{i\,(\dots\dots)}{(p_1+p_2)^2+m^2+i\epsilon} \qquad \text{impulsi}$$

la formula di Veneziano vale per

$$Re(s) > 0$$
$$Re(t) > 0$$

al di fuori di questo dominio la funzione è definibile per prolungamento analitico. La Γ di Eulero è caratterizzata dall'avere una serie di poli infinita sull'asse reale negativo che cominciano dall'origine. Nell'intorno di un polo $(s \sim -n)$

$$\Gamma(s) \sim \frac{(-)^n}{n!} \frac{1}{s+n}$$

Questa ampiezza di scattering descrive quindi lo scambio di infiniti tipi di particelle (1 particella per ciascun polo)

$$\frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} \sim \frac{(-)^n}{n!} \frac{1}{s+n} \cdot \frac{\Gamma(t)}{\Gamma(t-n)}$$

---

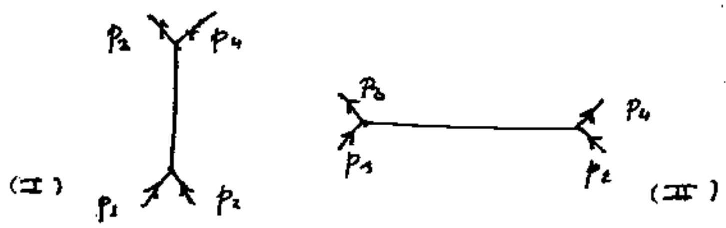
eq. funzionale $\quad \Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$

quindi

$$\frac{\Gamma(t)}{\Gamma(t-n)} = (t-1) \dots (t-n+1)(t-n)$$

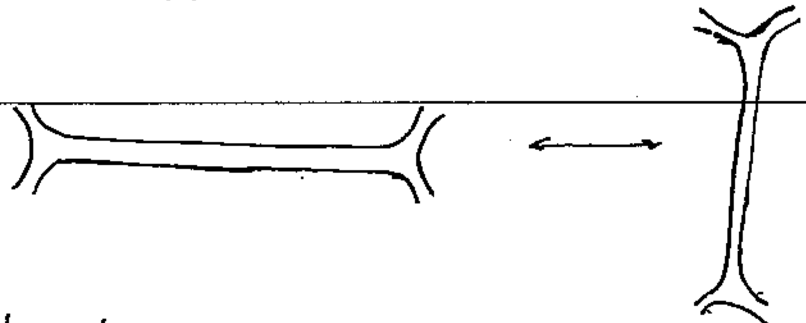
Quindi la formula di Veneziano descrive un processo di scattering di particelle scalari (non compaiono infatti polarizzazioni) che si scambiano un infinità di particelle con spin e massa crescente (intere traiettorie di Regge).

Questa funzione ha poi una proprietà importante la dualità planare: è simmetrica manifestamente nello scambio di s e t. Questo comporta che questa funzione ha sia i poli del canale orizzontale che del canale verticale.



(I) ha poli per p_1+p_2 su mass shell
(II) ha poli per p_1-p_3 su mass shell

Come si vede questo (piccola anticipazione storica):
urti di oggetti estesi stringhe



i due diagrammi sono equivalenti, sono l'uno la deformazione continua dell'altro.
I vertici invece sono discontinuità.
Questo è un argomento "qualitativo", formalizziamo meglio.

s e t devono avere significato di impulso al quadrato, perché vogliamo ricostruire le traiettorie di Regge

$$\begin{array}{ccccc} m^2 & \sim & n & \sim & s \\ \updownarrow & & & & \updownarrow \\ s & & & & t \end{array}$$

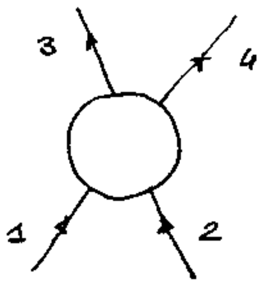
$[p^2] = E^2$ non è adimensionale, quindi prendiamo

$\alpha' p^2$

in questo modo si ritrova la relazione di Regge

$m^2 \sim \frac{n}{\alpha'} \sim \frac{J}{\alpha'}$

Studiamo la cinematica di un processo d'urto $2 \to 2$



<u>variabili di Mandelstam</u>:

$$\boxed{\begin{aligned} s &= -(p_1+p_2)^2 \\ t &= -(p_3-p_1)^2 \\ u &= -(p_4-p_1)^2 \end{aligned}}$$

1) nel C.M. $s = E_{TOT}$

2) $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$

$p_i^2 = m_i^2$

$s = m_1^2 + m_2^2 - 2p_1 p_2$

$t = m_1^2 + m_3^2 - 2p_1 p_3$

$u = m_1^2 + m_4^2 - 2p_1 p_4$

$$s+t+u = 3m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 - 2p_1 (\underbrace{p_3 + p_4 + p_2}_{p_1})$$

$$s + t + u = \sum_{i=1} m_i^2$$

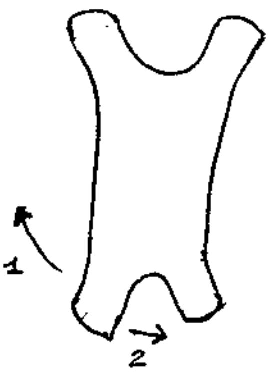
in realtà la formula di Veneziano si dovrà scrivere

$$\frac{\Gamma(-\alpha' s - 1)\,\Gamma(-\alpha' t - 1)}{\Gamma(-\alpha' s - \alpha' t - 2)}$$

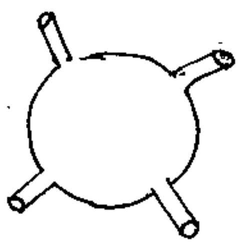
(i (-1) che sono comparsi saranno commentati più avanti)

<u>Osservazione</u> : nel 1969 Shapiro e Virasoro formularono una ampiezza completamente simmetrica in tre variabili s, t, u con le stesse proprietà dell' ampiezza di Veneziano.
Come può succedere : argomento qualitativo

~~(a) consideriamo stringhe aperte, abbiamo deformazioni di un~~ disco: possiamo solo avvicinare le gambe a coppie in un modo o nell'altro (canale orizzontale e canale verticale). (dualità planare)



(b)



Se invece le 4 gambe esterne si muovono su di una sfera (che è la deformazione naturale di qualunque diagramma di Feynman prodotto da <u>stringhe chiuse</u>) è naturale la totale simm. perché le 4 gambe hanno lib. di movimento e si possono avvicinare in qualunque modo.

Negli anni '70 si cercò di calcolare diagrammi ad un loop, si notò però che in questi diagrammi c'era violazione dell'unitarietà.
In canali identificabili dei diagrammi ad albero si trovavano dei "tagli" dove ci si aspettava di trovare solo poli. Questo problema scompariva per dimensioni = 26.

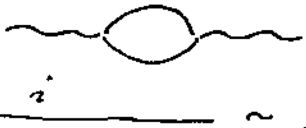
In realtà già nei primi anni settanta l'ampiezza di Veneziano aveva mostrato problemi.
Gli esperimenti di scattering profondamente anelastico avevano evidenziato una struttura dura e puntiforme. Si dovevano avere sezioni d'urto che vanno a potenza. ($1/p^2 \sim 1/s^2$)
L'ampiezza di Veneziano invece decresce esponenzialmente per scattering ad angolo fisso ad alte energie.
Si trova che:

$$e^{-\alpha'(\#)s}$$

α' è fissato dalle risonanze di Regge ~ 1 GeV, cioè per $E > 1$ GeV $s \sim 1$. Questo chiaramente non è vero.

Si ha però un aspetto notevole:

- per teo. di campo



$$\int d^4p \, \frac{i}{(\not p+m)(\not p+\not k+m)} \sim \int \frac{d^4p}{p^2} \sim$$ diverge per $p \to \infty$ (divergenze U.V.)

- nel nostro caso

$$\int d^4p \, e^{-s}$$

è convergente per $p \to \infty$, non ci sono più div. U.V.

Le teo. di gauge sono buone teo. per particelle libere con piccole interazioni (come QED); questo diventa meno vero per teo. fortemente interagenti. Ad esempio per quarks confinati la descrizione di teo. dei campi è cattiva ed è preferibile una descrizione con stringhe effettive (tubi di flusso, dell'ordine di 1 fm)

La gravita' invece non è rinormalizzabile

$$\int d^4p \frac{p^2}{(\ )(\ )} \qquad \text{(compare } p^2 \text{ al numeratore)}$$

L'idea è stata quella di usare le ampiezze di Veneziano, ponendo α' ad energie dell'ordine della scala di Planck

Confrontando la legge di Coulomb con quella di Newton

$$\frac{e^2}{r^2} \qquad \frac{Gm^2}{r^2}$$

$$e^2 \longrightarrow Gm^2 \sim \frac{GE^2}{c^4}$$

$$\frac{e^2}{\hbar c} \longrightarrow \frac{GE_p^2}{\hbar c^5}$$

si ha una cost. d'accoppiamento effettiva che cresce quadraticamente in energia.

$$\frac{GE_p^2}{\hbar c^5} \sim 1 \qquad E_{planck} \sim 10^{19}\,GeV$$

Lo stesso si puo' fare con le interazioni deboli quando $G_{fermi}E^2 \sim 1$ si trova la massa del bosone di gauge.

L'idea dietro le stringhe è che all'ordine dell'en. di Planck nuova fisica entri nella teoria, rendendo la teo. finita.

Quello che si vorrà vedere è che la nostra teo. descrive interazioni "soffici" ma anche fotoni, bosoni di gauge, ecc... Quello che succede è che accendendo le interazioni di gauge si accende anche la gravità (fondamentalmente le cost. d'accoppiamento sono proporzionali).

1.6. Calcolo della sezione d'urto dell'ampiezza di Veneziano

scattering in C.M.

$$\begin{cases} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \\ \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = 0 \end{cases}$$

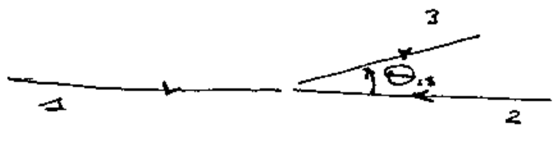
$$S = E^2_{CM.}$$

se $m_1 = m_2 = \dots = m_i = m$

$$\begin{cases} S = 4E_1^2 \\ t = -(p_1 - p_3)^2 = -(\vec{p}_1^{\,2} + \vec{p}_3^{\,2} - 2\vec{p}_1 \vec{p}_3) \end{cases}$$

$$= -(S - 4m^2)\sin^2\frac{\theta_{13}}{2}.$$

- se $\theta_{13} \simeq 0 \quad t \simeq 0$



- S grande

$$t \sim -s \sin^2\frac{\theta_{13}}{2}$$

quindi l'ampiezza di Veneziano; usando la formula

$$\Gamma(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^{x-1/2} e^{-x}\sqrt{2\pi}$$

considerando il modulo

$$\left| \frac{\Gamma(-\alpha' s)\,\Gamma(-\alpha' t)}{\Gamma(-\alpha' s - \alpha' t)} \right| \sim \frac{|\alpha' s|^{-\alpha' s} \; |\alpha' t|^{-\alpha' t}}{|\alpha' s + \alpha' t|^{-\alpha' s - \alpha' t}}$$

vogliamo studiare l'andamento in funzione dell'angolo

$$t = - s \sin^2\theta/2$$

$$B(s,t) \sim \frac{|\sin^2\theta/2|^{\alpha' s \sin^2\theta/2}}{|\cos^2\theta/2|^{-\alpha' s \cos^2\theta/2}}$$

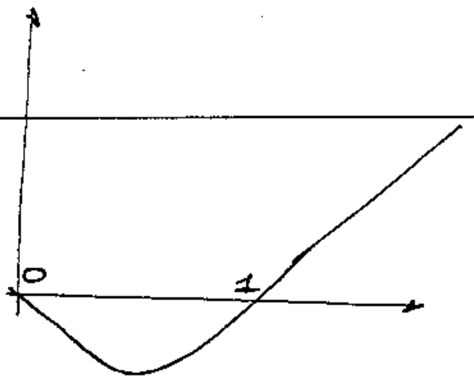
definiamo

$x = \sin^2\theta/2$

esponenziando:

$$B(s,t) \sim e^{\alpha' s \, x \log x + (1-x)\log(1-x)}$$

$x \log x$



$x \in [0,1]$

quindi i due termini all'exp. sono entrambi negativi, i casi $x = 0$, $x = 1$ corrispondono a $\theta = 0$, $\theta = \pi$.

Per gli altri valori di x si è trovato il decremento esponenziale, con un minimo per $x = 1/2$

$$e^{-\alpha' s \log 2}$$

Chiaramente questo comportamento non va bene per sezioni d'urto adroniche.

2. STRINGHE BOSONICHE LIBERE

Si è visto che l'ampiezza di Veneziano ad alte energie da luogo a sezioni d'urto con un andamento $e^{-\alpha' s}$, dove α' funziona come una sorta di cut-off ultravioletto.

Un modello semplice che riproduce il comportamento della ampiezza di Veneziano è quello di stringa bosonica che ha uno spettro di massa in cui compare il tachione, una particella di massa negativa.

La presenza di stati con massa <0 è un sintomo di instabilità della teoria. La matrice di massa per un campo ϕ si ottiene:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial \phi} = m_\phi^2 \\ \dfrac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \end{cases}$$

Una $m_\phi^2 < 0$ quindi segnala un massimo del potenziale. ?

2.1 Azione per particelle puntiformi

L'azione di una particella relativistica viene scritta nella forma:

$$S = -mc\int dt\,\sqrt{1 - v^2/c^2} = -mc\int ds \qquad [2.1]$$

che è equivalente alla formulazione di tipo geometrico:

$$S = \frac{1}{2}\int d\tau \left[\frac{1}{e}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\eta_{\mu\nu} - m^2 e\right] \qquad [2.2]$$

e funge da moltiplicatore di Lagrange ed è una sorta di metrica lungo la linea d'universo della particella. Il secondo termine della azione può essere visto come un termine di costante cosmologica.

Verifichiamo l'equivalenza della [2.1] e della [2.2], variando "e" si ha l'eq. del moto $\frac{\delta S}{\delta e}=0$

$$\frac{\delta e}{e^2}\frac{dx^\mu}{d\tau}\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau}\eta_{\mu\nu}+m^2\delta e=0$$ da cui

$$m^2 e=\frac{1}{e}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\eta_{\mu\nu} \qquad [2.3]$$

Variando le coordinate di particella

$$\delta S=\int d\tau\,\frac{1}{e}\,\frac{dx^\mu}{d\tau}\cdot\frac{d}{d\tau}\delta x^\nu\,\eta_{\mu\nu}$$

e quindi per $\delta S=0$ si hanno le eq. del moto

$$\frac{1}{e}\frac{d}{d\tau}\left[\frac{dx^\mu}{d\tau}\right]=0$$

questo dice che esiste una 'gauge' che pone $e=1$ facendo scomparire il parametro e.

La [2.3] può essere vista come un vincolo nella forma

$$p^\mu p^\nu\eta_{\mu\nu}+m^2=0$$

Usando la [2.3] si riscrive la [2.2], che è la II^a formulazione dell'azione come

$$S=-m^2\int d\tau\, e$$

ma si ha anche che

$$me=\sqrt{\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\eta_{\mu\nu}}$$

per cui sostituendo nella azione si riottiene la prima formulazione dell'azione [2.1]

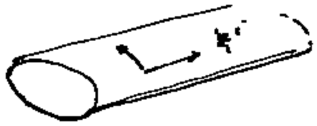
$$S=-m\int d\tau\sqrt{\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\eta_{\mu\nu}}=-m\int d\tau\sqrt{\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2-\left(\frac{d\vec{x}}{d\tau}\right)^2}$$

$$=-m\int dt\sqrt{1-v^2}$$

La formulazione dell'azione [2.2] è definita, a differenza della [2.1] anche per $m=0$, descrive quindi anche il moto di particelle di massa nulla.

2.2. Azione di Stringa

Vogliamo in analogia alla formulazione "geometrica" dell'azione di particella scrivere l'azione per una stringa. L'analogo della linea d'universo della particella, per una stringa è il <u>world-sheet</u>: la superficie spazzata da una stringa nel suo moto.
Nel caso puntiforme $S \propto \int ds$, ci si aspetta che l'azione di stringa sia proporzionale all'area spazzata.



γ_{ab} : metrica

Postuliamo (<u>Azione di Polyakov</u>)

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int \sqrt{-\gamma}\, d^2\xi\, \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} \qquad [2.4]$$

si è sostituita la metrica unidimensionale e con la metrica 2×2 simmetrica γ_{ab} mentre $\sqrt{-\gamma}\, d^2\xi$ è la misura invariante rispetto a una riparametrizzazione ξ^a $a = 1,2$.
Rispetto al world-sheet la [2.4] descrive una teoria in 1+1 dimensioni che è covariante sotto trasformazioni generali di coordinate. In questa teoria gli X^μ entrano come campi scalari che trasformano come un vettore sotto trasformazioni di Poincaré di D dimensioni (D dim. dello spazio di immersione), e come scalari sotto riparametrizzazioni del world-sheet.
I campi X^μ sono accoppiati alla gravità in (1+1) dimensioni.

Si potrebbe voler aggiungere all'azione un termine di Einstein-
-Hilbert

$$S_g = \int \sqrt{-\gamma}\, R\, d^2\xi \qquad [2.5]$$

Questo termine, con R <u>scalare di curvatura</u> in 2 dim. è irrilevante.
In 2 dim l'eq. di Einstein è identicamente soddisfatta

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \Rightarrow g^{\mu\nu}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right) = R - R = 0.$$

Il termine [2.5] è una divergenza totale, cioè dipende da come si comportano i campi all'infinito (termine topologico).

Osservazione: termini topologici

$$S = \int \left(m\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{q}{c} \vec{A}\cdot\vec{x} \right) dt$$

per A costante (per $\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$) il secondo termine è integrabile e con il teo. di Stokes diventa un termine di superficie.
I termini topologici possono diventare importanti su uno spazio compatto.
Ad es. nel caso e.m. il momento coniugato è

$$\vec{p} = m\dot{\vec{x}} + \frac{q}{c}\vec{A}$$

$$H = -\mathcal{L} + p\dot{q} = -\left(m\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{x} \right) + m\dot{\vec{x}} + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{x} = \frac{m}{2}\dot{x}^2$$

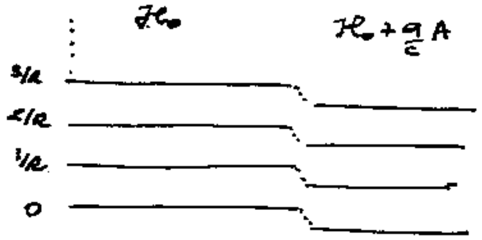
Se si ha una particella vincolata su un cerchio la sua funzione d'onda deve essere periodica. La f.d.o. di particella libera:

$$\Psi(x) = \Psi(x + 2\pi R) \;;\; \Psi(x) = e^{ip\cdot x} = \Psi(x + 2\pi R) = e^{ip(x+2\pi R)}$$

questo impone la discretizzazione dell'impulso

$$pR = n \longrightarrow p = \frac{n}{R}$$

Il campo produce uno shift dei livelli discretizzati



Se quindi si compattificasse la ns teoria di stringhe su sup. compatte (toro, sfera...) si dovrebbe tenere in conto il termine di costante cosmologica.

2.3 Equazioni dei vincoli

Come nel caso di particella relativistica dobbiamo supporre che siano soddisfatte le eq. del moto per la metrica.

- Variazione dell'inversa di una matrice

$$AA^{-1} = 1$$

$$\delta A A^{-1} + A\,\delta A^{-1} = 0$$

$$\delta A^{-1} = -A\,\delta A\,A^{-1} \qquad [2.6]$$

- variazione del det M

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{matrice } 2\times 2$$

$$\det M = (ad - bc)$$

$$\delta \det M = \delta a\, d + a\,\delta d - \delta b\, c - b\,\delta c$$

si può da qui capire che la variazione del determinante è la somma delle variazioni degli elementi della matrice moltiplicati per i rispettivi complementi algebrici.

$$\delta \det \gamma_{ab} = \delta\gamma_{cd} M^{cd} = \delta\gamma_{cd} \det\gamma_{ab}\,\gamma^{cd}$$

M^{cd} complemento algebrico di γ_{cd}, $M^{cd} = \det\gamma_{ab}\,\gamma^{cd}$ cioè gli elementi dell'inversa trasposti e moltiplicati per il determinante. Ma $\gamma^{ab} = \gamma^{ba}$ perchè è simmetrica.

$$\delta S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\xi \left[\frac{\sqrt{-\gamma}}{2}\,\delta\gamma_{cd}\gamma^{cd}\gamma^{ab} - \sqrt{-\gamma}\,\gamma^{ac}\delta\gamma_{cd}\gamma^{db}\right]\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}$$

infatti

$$\delta(\sqrt{-\gamma}) = \frac{1}{2\sqrt{-\gamma}}\,\delta(-\gamma) = \frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\,\delta\gamma_{cd}\gamma^{cd}$$

$$\delta S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\xi\,\sqrt{-\gamma}\,\delta\gamma_{cd}\left[\frac{1}{2}\gamma^{cd}\gamma^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu\eta_{\mu\nu} - \gamma^{ac}\gamma^{db}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu\eta_{\mu\nu}\right]$$

ponendo $\delta S = 0$ e contraendo l'eq. ottenuta si ottiene
(rinominando gli indici)

$$\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu = \frac{1}{2}\gamma_{ab}\partial_c X^\mu \partial_d X^\nu \gamma^{cd}\eta_{\mu\nu} \qquad [2.7]$$

che puo' anche essere scritto come

$$T_{ab} = 0 \qquad [2.8]$$

dove T_{ab} è il tensore energia impulso ottenuto variando l'azione rispetto alla metrica che abbiamo visto essere

$$T_{ab} \equiv \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{2}\gamma_{ab}\partial_c X^\mu \partial_d X^\nu \gamma^{cd}\eta_{\mu\nu} \qquad [2.9]$$

2.4 Azione di Nambu - Goto

facendo il det della [2.7] si ha:

$$\det(\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}) = \frac{1}{4}(\det\gamma_{ab})(\partial_c X^\mu \partial_d X^\nu \gamma^{cd}\eta_{\mu\nu})^2$$

(i fattori numerici al secondo termine sono stati quadrati dal momento che si sta lavorando con matrici 2x2)

cambiando di segno e facendone la radice quadrata

$$\sqrt{-\det(\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu})} = \frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\,\partial_c X^\mu \partial_d X^\nu \gamma^{cd}\eta_{\mu\nu}$$

ora si puo' sostituire nell'azione [2.4]

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\xi\,\sqrt{-\det(\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu})} \qquad [2.10]$$

Scritta in questa forma l'azione è proporzionale all'area spazzata dalla stringa nel suo moto.

Nel caso di traiettorie di particelle puntiformi si era legata l'azione all'arco di curva. Diamo ora un'interpretazione "geometrica" della [2.10]

$$\det(\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu) = \det\begin{bmatrix} \dot X\cdot\dot X & \dot X\cdot X' \\ X'\cdot\dot X & X'X' \end{bmatrix} = \dot X^2 X'^2 - (\dot X\cdot X')^2$$

- per una superficie bidimensionale

$ds^2 = dx^2 + dy^2$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$ds^2 = (dr\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta)^2 + (dr\sin\theta + r\cos\theta\, d\theta)^2 =$$

$$= dr^2 + r^2 d\theta^2$$

per cui

$$\int dx\,dy\, f(x,y) = \int r\,dr\,d\theta\, \hat f(r,\theta)$$

infatti come noto

$$\int dx\,dy = \int |J(x,y;\theta,y)|\,dr\,d\theta$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

ma si può anche scrivere

$$(dr \;\; d\theta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} = ds^2 \longrightarrow \sqrt{\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}} = r$$

- vogliamo ora generalizzare

$$ds^2 = E(d\xi)^2 + G(d\eta)^2 + 2F\, d\xi\, d\eta$$

$$(d\xi \;\; d\eta)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$$

per cui

$$\int \sqrt{EG - F^2}\; d\xi\, d\eta$$

nel nostro caso

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dX^\mu dX^\nu$$

consideriamo una variazione della metrica

$$dX^\mu = \partial_a X^\mu d\xi^a$$
$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu d\xi^a d\xi^b$$

$$E = \eta_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu$$
$$G = \eta_{\mu\nu} X'^\mu X'^\nu$$
$$F = \eta_{\mu\nu} \dot{X}^\mu X'^\nu$$

e cioè come ci si aspettava

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{(\dot{X})^2 (X')^2 - (\dot{X}\cdot X')^2}$$

scegliendo coordinate t.c. il termine diagonale $\dot{X}\cdot X'$ sia zero sparisce la non linearità dell'azione.

Osservazione: l'azione di una generica p-forma sarà proporzionale al volume spazzato nel moto

2.5 Equazioni del moto

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \sqrt{-\gamma}\, \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}$$

troviamo le equazioni del moto per X^μ, variando rispetto a X^μ l'azione. Si ha

$$\delta S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\xi \sqrt{-\gamma}\, \gamma^{ab} (\partial_a \delta X^\mu)(\partial_b X^\nu) \eta_{\mu\nu}$$

Integrando per parti e ponendo le variazioni al bordo uguali a zero

$$\partial_a (\gamma^{ab} \sqrt{-\gamma}\, \partial_b X^\mu) = 0$$

γ^{ab} è una matrice simm. 2×2 ha quindi 3 elementi diversi. Si può sempre riparametrizzare le coordinate ξ^a del world-sheet. $\xi^a \to \xi^a + f^a(\xi)$. Si può in questo modo diagonalizzare la metrica localmente. ~~Una forma conveniente è~~

$$\gamma_{ab} = e^\phi \eta_{ab} \qquad [2.11]$$

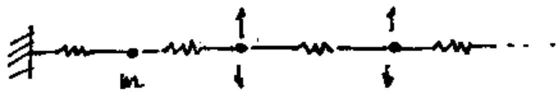
η_{ab} è la metrica piatta minkowskiana, nell'euclideo si avrebbe δ_{ab}, e^ϕ è un fattore conforme. Questa scelta è detta di "gauge conforme". Ovviamente si ha

$$\det \gamma_{ab} = e^{2\phi} \det \eta_{ab}$$

Con questa metrica si ha l'eq. 2 dim. delle onde

$$\Box X^\mu = \left(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right) X^\mu = 0 \qquad [2.12]$$

l'eq. trovata è l'eq. di corde vibranti. Si può introdurre una tensione della corda. Per un oscillatore armonico (catena di oscillatori armonici) si ha:



$$m\ddot{y}_i = k(y_{i+1} - y_i) + k(y_{i-1} - y_i)$$

$$\ddot{y}_i = \frac{k}{m} \frac{(y_{i+1} - y_{i-1} - 2y_i)}{\Delta^2} \Delta^2$$

Δ : separazione delle masse

Per $\Delta \longrightarrow 0$ si ha una corda vibrante (ρ : densità di massa)

$$\frac{T}{\rho} = \frac{k\Delta^2}{m} = \frac{k\Delta^2}{(\rho\Delta)} = \frac{k\Delta}{\rho} \Longrightarrow \frac{T}{\rho} = \frac{k\Delta}{\rho} \qquad T\text{: tensione}$$

2.6 Stringhe chiuse

Le stringhe chiuse sono dei loop con nessun estremo libero, topologicamente equivalenti a dei cerchi.

Vogliamo risolvere l'eq.

$$\partial_\tau^2 X^\mu - \partial_\sigma^2 X^\mu = 0$$

con condizioni di periodicità delle coordinate

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + \pi)$$

Si risolve per separazione delle variabili

$$X^\mu = A(\sigma) B(\tau)$$

sostituendo nella [2.12]

$$A(\sigma)\frac{d^2B(\tau)}{d\tau^2} - B(\tau)\frac{d^2A(\sigma)}{d\sigma^2} = 0$$

$$\frac{1}{B(\tau)}\frac{d^2B(\tau)}{d\tau^2} = \frac{1}{A(\sigma)}\frac{d^2A(\sigma)}{d\sigma^2}$$

si ha quindi

$$\begin{cases} \dfrac{d^2A}{d\sigma^2} + \lambda^2 A = 0 & \text{spaziale} \\ \dfrac{d^2B}{d\sigma^2} + \lambda^2 B = 0 & \text{temporale} \end{cases}$$

(a) spaziale

$$A = \begin{cases} \alpha + \beta\sigma & \lambda = 0 \\ \alpha e^{i\lambda\sigma} + \beta e^{-i\lambda\sigma} & \lambda \neq 0 \end{cases}$$

imponendo la periodicita' $A(\sigma) = A(\sigma + \pi)$

$$A(\sigma) = \begin{cases} \alpha & \lambda = 0 \\ \alpha e^{i2n\sigma} + \beta e^{-i2n\sigma} & \lambda \neq 0 \end{cases}$$

cioe' in forma compatta

$$A(\sigma) = \alpha e^{i2n\sigma} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

(b) temporale

$$B = \begin{cases} a + b\tau & \lambda = 0 \\ \beta e^{-i2n\tau} + \beta' e^{i2n\tau} & \lambda \neq 0 \end{cases}$$

x^μ sara' quindi una somma di prodotti che puo essere scritta come

$$X^\mu = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\left(\frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{i2n(\tau-\sigma)} + \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{n} e^{-i2n(\tau+\sigma)}\right)$$

[2.13]

X^μ e p^μ possono essere interpretati come la posizione del centro di massa e l'impulso totale della stringa.

$$S = \frac{1}{4\alpha'\pi}\int d^2\xi\, \eta^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} \qquad \gamma^{ab} = \eta^{ab}$$

$$= \frac{1}{4\alpha'\pi}\int d^2\xi \left[(\partial_\tau X^\mu)(\partial_\tau X^\nu) - (\partial_\sigma X^\mu)(\partial_\sigma X^\nu)\right]\eta_{\mu\nu}$$

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\tau X_\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'}(\partial_\tau X^\mu)$$ densità di impulso lungo la stringa

$$P^\mu = \int_0^\pi d\sigma\, \Pi^\mu = p^\mu$$

Eccetto il zero-modo, tutti i modi vengono mediati a zero.

Osservazione: il campo e.m. ha 2 gradi di libertà fisici, le equazioni di Maxwell

$$\Box A^\mu - \partial_\mu(\partial \cdot A) = 0$$

introducendo e sistema di coordinate del cono di luce

$$A^+ = \frac{A^0 + A^3}{\sqrt{2}} \qquad A^- = \frac{A^0 - A^3}{\sqrt{2}}$$

$$A_+ = \frac{-A_0 + A_3}{\sqrt{2}} = -A^- \qquad \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-,+,+,+)$$

si può scegliere la gauge $A^+ = 0$, le eq. di Maxwell diventano nella direzione +

$$\partial_+(\partial \cdot A) = 0$$

la soluzione in onde piane sarà $A_\mu = \epsilon_\mu e^{ipx}$, dalle eq. di M. si ha

$$p_+(\partial \cdot A) = 0$$

$$0 = \partial \cdot A = \partial_0 A^0 + \partial_1 A^1 + \partial_2 A^2 + \partial_3 A^3 = (\partial_3 - \partial_0)A^3 + \partial_1 A^1 + \partial_2 A^2$$

usando la condizione di gauge per porre $A^0 = -A^3$

$$0 = 2ipA^3 + \partial_1 A^1 + \partial_2 A^2$$

si ha un eq. lineare per A^3, le onde e.m. sono puramente trasverse. Con le stringhe si procede in maniera analoga, usando i vincoli trovati.

Procediamo alla quantizzazione canonica della ns teoria, usando Π^μ e X^μ:

$$\left[X^\mu(\sigma,\tau), \frac{\dot{X}^\nu}{2\pi\alpha'}(\sigma',\tau)\right] = i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma')$$

Sostituendo l'espansione nei modi per X^μ e usando la proprietà

$$\delta(\sigma-\sigma') = \sum_n \frac{e^{2\pi i(\sigma-\sigma')}}{\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\sigma-\sigma'-n\pi)$$

Il terzo pezzo generalizza il primo dal momento che per stringhe chiuse $\sigma+\pi=\sigma$. Otteniamo le regole di commutazione sui coeff. dei modi.

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0}$$
$$[\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0}$$
$$[\tilde{\alpha}_m^\mu, \alpha_n^\nu] = 0 \qquad [2.14]$$

Gli α_m sono interpretati come operatori di creazione e distruzione di oscillatori armonici dove per $m<0$ si intende di creazione e per $m>0$ di distruzione. Possono essere collegati agli operatori di oscillatore armonico con la normalizzazione convenzionale:

$$\alpha_m^\mu = \sqrt{m}\, a_m^\mu$$
$$\alpha_{-m}^\mu = \sqrt{m}\, a_m^{\mu +}$$
$$[a_m^\mu, a_n^{\nu +}] = \eta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0}$$

Un punto di fondamentale importanza è che lo spazio di Fock degli stati, costruito a partire dallo stato fondamentale $|0\rangle$

non è definito positivo. Le componenti temporali hanno infatti una relazione di commutazione con segno meno.

$[a^0_m, a^{0+}_m] = -1$

e quindi lo stato $a^{0+}_m|0\rangle$ ha norma negativa, cioè:

$\langle 0| a^0_m a^{0+}_m |0\rangle = -1$

Lo spazio fisico degli stati permessi di stringa sarà un sottospazio dello spazio di Fock completo.

L'azione di stringa scritta è invariante sotto diffeomorfismi (trasformazioni generali di coordinate $\sigma,\tau \to \sigma',\tau'$)

C'è una seconda invarianza è la simmetria sotto scaling di Weyl, cioè per trasformazioni

$$\gamma_{ab} \to \Omega\gamma_{ab} \qquad \gamma^{ab} \to \frac{1}{\Omega}\gamma^{ab}$$

$$\det(-\gamma_{ab}) \to \Omega^2 \det(-\gamma_{ab})$$

Una parametrizzazione del world sheet conveniente è $\gamma_{ab} = e^{\phi}\eta_{ab}$ dove η_{ab} è la metrica piatta ed e^{ϕ} un fattore conforme. Nella azione compare la combinazione $\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{ab}$ e dal momento che γ^{ab} è proporzionale a $e^{-\phi}$ e $\sqrt{-\gamma}$ è proporzionale a e^{ϕ}, complessivamente c'è invarianza sotto trasformazioni conformi.

Consideriamo

$$ds^2 = e^{\phi} d\xi^a d\xi^b \eta_{ab} =$$
$$= e^{\phi}(-(d\tau)^2 + (d\sigma)^2) = e^{\phi}(-d\tau + d\sigma)(d\tau + d\sigma)$$

sotto trasformazioni

$$\begin{cases} \tau + \sigma = f(u+v) \\ \tau - \sigma = g(-u+v) \end{cases}$$

$$ds^2 = e^{\phi}\, g'(-du + dv)\, f'(du + dv) =$$
$$= e^{\phi}\, g' f' (-(du)^2 + (dv)^2)$$

nell' euclideo

$$\tau \longrightarrow i\tau$$

$$\begin{cases} \tau + i\sigma = f(u+i\vartheta) \\ \tau - i\sigma = \bar{f}(u-i\vartheta) \end{cases}$$

$$ds^2 = e^{\phi}(d\tau + i d\sigma)(d\tau - i d\sigma) =$$
$$= e^{\phi} f'(du + i d\vartheta)\bar{f}'(du - i d\vartheta) =$$
$$= e^{\phi}|f'|^2((du)^2 + (d\vartheta)^2)$$

Questo cambio di variabili modifica la metrica di un fattore $|f'|^2$, è possibile però riassorbirlo localmente con lo scaling di Weyl. Sotto questa simm. infinita è sempre possibile scegliere coord. convenienti.

Consideriamo ora una ridefinizione delle variabili con una trasformazione analitica

$$W = u + iv = f(\sigma + i\tau)$$

$$z = \sigma + i\tau \qquad \bar{z} = \sigma - i\tau$$

$$\frac{df}{d\bar{z}} = 0 = \frac{dW}{d\bar{z}} \qquad \left(\frac{d}{d\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{d\sigma} + i\frac{d}{d\tau}\right) \right)$$

cioè:

$$\partial_\sigma W + i\partial_\tau W = 0$$

si avranno le condizioni di Cauchy - Reimann

$$\begin{cases} \partial_\sigma u = \partial_\tau v \\ \partial_\tau u = -\partial_\sigma v \end{cases}$$

ovvero u e v soddisfano le equazioni (nell' euclideo)

$$\nabla^2 u = 0 \qquad \nabla^2 v = 0$$

e passando al minkowskiano

$$\Box u = 0 \qquad \Box v = 0$$

le nuove variabili soddisfano l'eq. delle onde. Quindi quello che si è fatto è un cambio di variabili $(\sigma, \tau) \to (\tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$ tale che le nuove variabili $\tilde{\tau}$ e $\tilde{\sigma}$ soddisfano l'eq. delle onde.

Vogliamo ora valutare le restrizioni indotte dal vincolo [2.7].
In generale si tratta di vincoli non lineari. Usando le coord. del cono di luce si linearizzano

$$X^\mu X^\nu \eta_{\mu\nu} = -X_0^2 + X_{D-1}^2 + \sum_{i=1}^{D-2} X_i^2 = -2\left(\frac{X_0+X_{D-1}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{X_0-X_{D-1}}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= -2\left(\frac{X^0+X^{D-1}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{X^0-X^{D-1}}{\sqrt{2}}\right) = -2X^+X^- + \sum_{i=1}^{D-2} X_i^2$$

poniamo

$$X^+ = x^+ + (2\alpha')\, p^+ \tau \qquad [2.15]$$

introduciamo coord. di cono di luce sul word sheet

$$\xi^\pm = \tau \pm \sigma \qquad \tau^2 - \sigma^2 = \xi^+ \xi^-$$

la metrica diventa

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

l'eq. [29] diventa $(\eta_{+-} = \eta_{-+} = 1/2 \,,\ \eta^{+-} = \eta^{-+} = 2)$

$$\begin{cases} \partial_+ X^\mu \partial_+ X^\nu \eta_{\mu\nu} = 0 \\ \partial_- X^\mu \partial_- X^\nu \eta_{\mu\nu} = 0 \end{cases}$$

e usando le coord. di cono di luce

$$\begin{cases} -2\partial_+ X^+ \partial_+ X^- + (\partial_+ X^i)^2 = 0 \\ -2\partial_- X^+ \partial_- X^- + (\partial_- X^i)^2 = 0 \end{cases} \qquad [2.16]$$

definiamo delle derivate $\partial_\pm$ ponendo

$$\begin{cases} \partial_+ \xi^+ = 1 \\ \partial_- \xi^+ = 0 \end{cases} \Longrightarrow \partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma)$$

quindi dalla [2.15]

$\partial_\pm X^+ = \alpha' p^+$ sostituendo nelle [2.16]

$$\begin{cases} 2\alpha' p^+ \partial_+ X^- = (\partial_+ X^i)^2 \\ 2\alpha' p^- \partial_- X^- = (\partial_- X^i)^2 \end{cases} \qquad [2.17]$$

si sono di fatto eliminati gli oscillatori nella direzione +, ora si possono esplicitare gli α nella direzione − agli α nella direzione +.

$$\partial_+ X^\mu = \alpha' p^\mu + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n\neq 0} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)}$$

$$\partial_- X^\mu = \alpha p^\mu + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n\neq 0} \alpha_n^\mu \, e^{2in(\tau-\sigma)}$$

definiamo

$$\tilde{\alpha}_0^\mu = \sqrt{2\alpha'}\; p^\mu/2$$

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'}\; p^\mu/2$$

$$\partial_+ X^\mu = \sqrt{2\alpha'} \sum_n \tilde{\alpha}_n^\mu \, e^{-2in(\tau+\sigma)}$$

$$\partial_- X^\mu = \sqrt{2\alpha'} \sum_n \alpha_n^\mu e^{2in(\tau-\sigma)}$$

sostituiamo ora queste espressioni nei vincoli [2.17]

$$\begin{cases} 2\alpha' p^+ \sqrt{2\alpha'} \sum_n \tilde{\alpha}_n^- e^{-2in(\tau+\sigma)} = 2\alpha' \sum_{m,n} \tilde{\alpha}_n^i \tilde{\alpha}_m^i e^{-2i(n+m)(\tau+\sigma)} \\ 2\alpha' p^+ \sqrt{2\alpha'} \sum_n \alpha_n^- \, e^{-2in(\tau-\sigma)} = 2\alpha' \sum_{m,n} \alpha_n^i \alpha_m^i \, e^{2i(n+m)(\tau-\sigma)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \qquad // \qquad = 2\alpha' \sum_m' \sum_n e^{-2in(\tau+\sigma)} \tilde{\alpha}_{n-m}^i \tilde{\alpha}_m^i \\ \qquad // \qquad = 2\alpha' \sum_m' \sum_n e^{2in(\tau-\sigma)} \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i \end{cases}$$

dove si è fatto un cambiamento degli indici

$$n+m \longrightarrow n$$

$$m \longrightarrow n-m$$

ora si può scrivere uguagliando i coefficienti

$$\begin{cases} p^+ \sqrt{2\alpha'}\; \tilde{\alpha}_n^- = \sum_m \tilde{\alpha}_{n-m}^i \tilde{\alpha}_m^i \\ p^+ \sqrt{2\alpha'}\; \alpha_n^- = \sum_m \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i \end{cases} \qquad [2.18]$$

le eq. trovate collegano i modi nella direzione − a quelli trasversi.

Il modo 0 di questa equazione determina i quadrati delle masse di tutti gli stati di eccitazione della stringa.

$$\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0 = \sqrt{2\alpha'}\,\frac{p}{2}$$ sostituendo in [2.18] si ha:

$$\alpha' p^+ p^- = \sum_m \tilde{\alpha}^i_{-m}\tilde{\alpha}^i_m = \frac{\alpha'}{2} p^{i2} + \sum_{m\neq 0} \tilde{\alpha}^i_{-m}\tilde{\alpha}^i_m$$

più la stessa relazione per le α_m.

$$\frac{\alpha'}{2}(2p^+p^- - p^{i2}) = \sum_{m\neq 0} \tilde{\alpha}^i_{-m}\tilde{\alpha}^i_m = \sum_{m\neq 0} \alpha^i_{-m}\alpha^i_m$$

questa è una condizione di mass shell

$$M^2 = p^\mu p_\mu = \frac{2}{\alpha'}\sum_{m\neq 0} \tilde{\alpha}^i_{-m}\tilde{\alpha}^i_m = \frac{2}{\alpha'}\sum_{m\neq 0} \alpha^i_{-m}\alpha^i_m \qquad [2.19]$$

si può riscrivere

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}\Big[\sum_{m\neq 0} \tilde{\alpha}^i_{-m}\tilde{\alpha}^i_m + \alpha^i_m\alpha^i_{-m}\Big] \qquad [2.20]$$

$$0 = \sum_{m\neq 0} \tilde{\alpha}^i_{-m}\tilde{\alpha}^i_m - \tilde{\alpha}^i_m\alpha^i_{-m} \qquad [2.21]$$

la seconda pone un vincolo sugli operatori: l'autovalore numero deve essere lo stesso per gli oscillatori α_i e $\tilde{\alpha}_i$. è detta condizione di <u>level matching</u>

Classicamente i modi di vibrazione di una corda sono caratterizzati da frequenze positive, solo il modo di traslazione ha frequenza nulla. Ci si aspetta per ragioni dimensionali ($E = \hbar\nu$) di associare alle frequenze di vibrazione le masse delle particelle "descritte" dalla Lagrangiana. Avere solo frequenze positive significherebbe descrivere solo particelle a $m>0$ e quindi solo interazioni a corto raggio. In realtà in teo delle stringhe compaiono particelle di massa nulla.

Iniziamo dall'asserzione che l'op. numero è mal definito

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\tilde{\alpha}^i_{-m}\tilde{\alpha}^i_m + \alpha^i_m \alpha^i_{-m}\right)$$

la seconda parte della sommatoria era definita da -1 a $-\infty$, si è cambiato segno all'indice

$$= 2\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{\alpha}^i_{-m}\tilde{\alpha}^i_m + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\tilde{\alpha}^i_m , \tilde{\alpha}^i_m\right] =$$

$$= 2\sum_{m=1}^{\infty} m\, a^{i,+}_m a_m + (D-2)\sum_{m=1}^{\infty} m = \qquad D-2 = \#\ \text{dimensioni } i$$

Il primo termine è un op. numero, il secondo però è divergente. Questa somma va quindi, opportunamente regolarizzata sottraendo l'energia di vuoto in maniera opportuna, per ottenere uno spettro Lorentz invariante.

Consideriamo un regolatore esponenziale

$$\sum_m m e^{-\epsilon m} = -\frac{d}{d\epsilon}\sum_m e^{-\epsilon m} = -\frac{d}{d\epsilon}\frac{1}{1-e^{-\epsilon}} =$$

$$= -\frac{d}{d\epsilon}\frac{1}{\epsilon - \epsilon^2/2 - \epsilon^3/6 - \dots} = -\frac{d}{d\epsilon}\left(\frac{1}{\epsilon}\left(1+\frac{\epsilon}{2}-\frac{\epsilon^2}{6}+\frac{\epsilon^2}{4}\dots\right)\right)$$

sviluppiamo in ϵ perchè siamo interessati al $\lim \epsilon \to 0$, si è usato lo sviluppo

$$(1-x)^{-a} = 1 + ax + \frac{a(a+1)}{2}x^2 + \dots \qquad a = 1$$

$$= -\frac{d}{d\epsilon}\left(\frac{1}{\epsilon}+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\epsilon\right) = \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{12} \quad \zeta(-1)$$

$$m^2 = \frac{4}{\alpha'}\left(\sum_m \tilde{\alpha}^i_{-m}\tilde{\alpha}^i_m - \frac{D-2}{24}\right) = \frac{2}{\alpha'}\left(\tilde{N} + N - \frac{D-2}{12}\right)$$

Si è sottratta la parte infinita e si è mantenuta la parte ~~finitura~~ della sommatoria $\sum_{m=1}^{\infty} m$.

$$m^2 = \frac{2}{\alpha'}\left(\tilde{N} + N - \frac{D-2}{12}\right) \qquad [2.22]$$

$$0 = (\tilde{N} - N)|s> \qquad [2.23]$$

$$N = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^{i}\alpha_{m}^{i} \qquad [2.24]$$

2.7 Stati di Stringa Chiusa

Uno stato $|s>$ sarà caratterizzato da 2 numeri riferiti a N e $\tilde{N}$. Definiamo stato di vuoto lo stato annichilato dagli $\alpha_m^i, \tilde{\alpha}_m^i$ $m>0$ che indichiamo con $|0,0>$

$$-\frac{2}{\alpha'}\frac{D-2}{12}|0,\tilde{0}> = m^2|0,\tilde{0}>$$

Questo è uno stato di massa negativa per $D>2$ è detto <u>tachione</u>. Lo stato successivo sarà $|1,0>$ ma non è uno ~~stato ammissibile~~ perché non soddisfa il vincolo [2.23].

Uno stato fisico è

$$\alpha_{-1}^{i}\tilde{\alpha}_{-1}^{j}|0,0>$$

$$m^2 = \frac{2}{\alpha'}\left[2 - \frac{(D-2)}{12}\right]$$

Questo stato è un Tensore T^{ij} senza simm. definita. Per una particella massiva esiste sempre un frame in cui è a riposo $p^\mu = (m, 0, \dots, 0)$. Gli stati formano una rappresentazione del gruppo delle rotazioni spaziali $SO(D-1)$. Per una particella di massa nulla non c'è frame in cui sia a riposo. $p^\mu = (E, E, 0 \dots, 0)$ Il gruppo $SO(D-2)$ agisce sulle direzioni trasverse lasciando p^μ invariante, gli stati interni formano una rappresentazione di questo gruppo.

Per $D=4$ questo è noto: le particelle massive sono definite dallo spin j, le rappresentazioni di $SO(3)$ hanno $2j+1$ stati. Le particelle di massa nulla sono definite dalla loro elicità λ che è l'autovalore sotto l'unico generatore di $SO(2)$. L'invarianza di Lorentz richiede un solo stato che sotto CPT prende λ e $-\lambda$ e cioè 2 stati di $\lambda \neq 0$.

In D dimensioni uno stato massivo vettoriale ha $D-1$ stati di spin mentre un vettore con $m=0$ ha solo $D-2$ stati. Nel nostro caso abbiamo solo $D-2$ gradi di libertà fisici, come visto. Quindi il nostro stato tensoriale deve essere di massa nulla (uno stato tensoriale può essere descritto come un prodotto di stati vettoriali).

Quindi si deve avere $D=26$, $m^2=0$ per avere Lorentz invarianza.

T^{ij} non ha simm. definita lo si può scomporre in

$$T^{ij} = \tilde{T}^{ij} + T^{[ij]} + \frac{1}{24}\delta_{ij} T^{i}{}_{j}$$

$\tilde{T}^{ij}$: tensore simm. a traccia nulla.

Se campo gravitazionale in approssimazione di campo debole

$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$

si ha l'equazione di propagazione

$$\Box h_{\mu\nu} - (\partial_\mu \partial_\rho h^\rho{}_\nu + \partial_\nu \partial_\rho h^\rho{}_\mu) + \partial_\mu \partial_\nu h^\rho{}_\rho = 0$$

questa equazione non propaga la traccia del tensore $h_{\mu\nu}$, quindi $\tilde{T}^{ij}$ descrive correttamente $h_{\mu\nu}$.

$T^{[ij]}$ è la generalizzazione del campo e.m. al caso in cui le sorgenti non sono puntiformi. Si ha

$$A^\mu \longrightarrow B^{\mu\nu}$$

$$F^{\mu\nu} \longrightarrow H^{\mu\nu\rho} = \partial^\mu B^{\nu\rho} + \partial^\nu B^{\rho\mu} + \partial^\rho B^{\mu\nu}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \longrightarrow \partial_\mu H^{\mu\nu\rho} = 0$$

Il campo scalare (la traccia) è una p. scalare a massa nulla: <u>dilatone</u>.

Quindi gli stati di stringa $\alpha^i_{-1}\tilde{\alpha}^j_{-1}|0\rangle$ descrivono correttamente i modi del campo gravitazionale, di una 2-forma e di un campo scalare, tutti a massa nulla. Lo spettro della stringa contiene inevitabilmente il campo gravitazionale.

Procedendo nella costruzione si possono costruire gli stati di massa $m>0$.

2.8 Stringa aperta

Il calcolo per una stringa aperta non è molto differente.
Poniamo condizioni al contorno:

$$X'^\mu\Big|_{\sigma=0,\pi} = 0 \qquad [2.25]$$

la soluzione sarà della forma:

$$X^\mu = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{\substack{n\neq 0\\ n=-\infty}}^{+\infty} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\tau}\cos n\sigma = X^\mu_+ + X^\mu_-$$

$$X^\mu_\pm = \frac{x^\mu}{2} + \alpha' p(\tau\pm\sigma) + i\frac{\sqrt{2\alpha'}}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in(\tau\pm\sigma)} \qquad [2.26]$$

Le frequenze sono dimezzate rispetto alle stringhe chiuse. Si ha un singolo set. di oscillatori.

si ha la f.mla di massa: (allo stesso modo)

$$M^2 = \frac{1}{2\alpha'} \sum_{n\neq 0} \alpha^i_{-n} \alpha^i_n \qquad [2.27]$$

$$= \frac{1}{\alpha'}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^i_{-n}\alpha^i_n + \frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\left[\alpha^i_n, \alpha^i_{-n}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha'}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^i_{-n}\alpha^i_n - \frac{D-2}{24}\right) \qquad [2.28]$$

rispetto alla stringa chiusa, lo spettro di stringa aperta è scalato di un fattore quattro. Costruendo lo spettro di stringa aperta si trovano ancora particelle di massa nulla.

2.1 Energia di Vuoto di una teoria di stringa

Per studiare lo spettro di stringa è utile geometrizzare il problema. Si è trovato che le condizioni di mass-shell sono

op. $M^2 = \frac{1}{\alpha'}(N-1)$

cl. $M^2 = \frac{4}{\alpha'}(N-1) = \frac{4}{\alpha'}(\tilde{N}-1)$

due condizioni di massa una sui modi sinistri e una sui modi destri che possono essere riscritte come

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}\left(N+\tilde{N}-2\right)$$

$N-\tilde{N}=0$ (condizione di level matching)

~~Queste relazioni riproducono le traiettorie di Regge quantizzate.~~
Il fattore -1 induce la presenza di particelle che propagano interazioni a lungo range ($m=0$).

Per geometrizzare il nostro problema occorre partire dall'en. di vuoto. In teo. dei campi l'en. di vuoto è data dai diagrammi a loop connessi. L'en. di vuoto è importante solo in ambito cosmologico, per TdC in spazio piatto è solo una cost. additiva, quando invece si accoppia la teo. alla gravità, l'en di vuoto determina la costante cosmologica.

I diagrammi a loop del tipo: ○, dipendono solo dalle masse delle particelle in gioco.

Mentre in TdC si ha a che fare con un n° finito di specie di particelle, nella teo. di stringa si ha un n° infinito di specie di particelle collegate alle eccitazioni della stringa. Lo spettro delle stringhe soddisfa dei vincoli geometrici che ci consentono di costruire nuove teo. di stringhe da altre. Si possono quindi studiare i processi di compattificazione in modo guidato.

Occorre quindi studiare i diagrammi di vuoto che contengono tutte le informazioni sullo spettro della teoria.

In TdC una teo. libera di un bosone scalare di massa m, nell'euclideo ha integrale funzionale

$$Z(J) = \int D\phi \; e^{-\int d^Dx \left\{ \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \right\} - \int J\phi} = e^{-W[J]}$$

dove $W[J]$ è il funzionale generatore delle funzioni connesse. L'azione effettiva è definita da una trasformazione di Legendre

$$\Gamma[\phi] = W(J) + \int J\phi \, d^Dx$$

che è una funzione del "campo classico" che è la media del campo ϕ in presenza di corrente

$$\bar{\phi} = \frac{\int D\phi \; e^{-S - \int J\phi} \phi}{\int D\phi \; e^{-S - \int J\phi}}$$

$\Gamma[\phi]$ è detto funzionale generatore delle funzioni irriducibili ad una particella. Il significato fisico è dato dalla relazione

$$\Gamma[\bar{\phi}] = S[\phi] + o(\hbar)$$

si tratta cioè di una generalizzazione dell'azione che tiene conto delle correzioni quantistiche. Si ha che

$$\begin{cases} \dfrac{\delta W}{\delta J} = -\bar{\phi} \\ \dfrac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\phi}} = J \end{cases}$$

Quindi se si calcola l'azione effettiva e poi si pone $J=0$, l'azione effettiva va a finire su un estremo. Questo valore prende il nome di energia di vuoto.

$$e^{-VE_0} = \int D\phi \; e^{-\int d^Dx \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2\right)}$$

$$= \int D\phi \; e^{-\int d^Dx \left(-\frac{1}{2}\phi\nabla^2\phi + \frac{m^2}{2}\phi^2\right)}$$

(integrando per parti)

si ha quindi un integrale gaussiano generalizzato

$$I = \int d^nx \; e^{-x^TAx} = (\det A)^{-1/2}\, \pi^{n/2}$$

quindi

$$e^{-VE_0} = \left[\det(-\nabla^2 + m^2)\right]^{-1/2}$$

$$V\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}\log\det(-\nabla^2 + m^2) \qquad [229]$$

Occorre manipolare queste funzioni di operatori. L'identità di partenza è

$$\log\frac{b}{a} = \int_a^b \frac{dx}{x} = \int_a^b dx \int_0^\infty e^{-xt}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty dt \int_a^b e^{-xt}\, dx =$$

$$\log \frac{b}{a} = (-)\int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(e^{-bt} - e^{-at} \right)$$

Quello che succede è che la presenza di a e b funge da una sorta di cut-off ultravioletto: per $t \to 0$ l'integrando in parentesi va linearmente in t perché il pezzo di ordine zero si cancella.
Possiamo quindi usare la formula trovata in maniera equivalente scrivendo

$$\log b = - \int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{t}\, e^{-tb} \qquad [2.30]$$

L'en. di vuoto diventa usando questa formula

$$V e_0 = -\frac{1}{2} \int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{t}\, \mathrm{tr} \left(e^{-t[-\nabla^2 + m^2]} \right) \qquad [2.31]$$

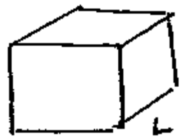
La traccia in [2.31] segue dalla formula

$$\log \det M = \mathrm{tr} \log M \qquad [2.32]$$

La traccia si calcola sommando su un set completo di stati. E' conveniente usare un set completo che diagonalizzi il laplaciano (autostati dell'impulso).

$$\mathrm{tr} (\quad) = \sum_p \langle p |\, e^{-t(p^2+m^2)}\, | p \rangle \qquad \text{(euclideo)}$$

$$p_i = \frac{2 n_i \pi}{L}$$


L

box regolarization

nel limite del continuo: $\displaystyle \sum_p e^{-t(p^2+m^2)}\, \Pi (n_{i+1} - n_i) \longrightarrow \frac{V}{(2\pi)^D} \int d^D p\; e^{-t(p^2+m^2)}$

infatti la $\sum_p$ è fatta sugli n_i dove "l'elemento di volume"
$\Delta n_i = \Pi(n_{i+1} - n_i) = 1$. Nel limite del continuo $\Delta n \rightarrow \Delta p$

$$\Delta p = \frac{\Pi(n_{i+1} - n_i)(2\pi)^D}{L^D} \quad \text{e poi} \quad \Delta p \rightarrow d^D p = \frac{L^D}{(2\pi)^D} dn .$$

Quindi $\sum_p \longrightarrow \frac{V}{(2\pi)^D} \int d^D p$. Si ha:

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{1}{2} \int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{t} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-t(p^2+m^2)}$$ e facendo l'int. gaussiano in p

$$= -\frac{1}{2} \int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{t} \left(\frac{\pi}{t}\right)^{D/2} \frac{1}{(4\pi^2)^{D/2}} e^{-tm} =$$

$$\mathcal{E}_0 = \frac{-1}{2(4\pi)^{D/2}} \int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{t^{D/2+1}} e^{-tm^2} \qquad [2.33]$$

Questa è l'en. di vuoto di un singolo bosone. Si può generalizzare. Per fermioni cambia il verso di percorrenza dei loop e, in altri termini il segno della potenza a cui è posto il determinante (integrali di variabili grassmanniane). Quindi considerando sia fermioni che bosoni

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{1}{2(4\pi)^{D/2}} \int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{t^{D/2+1}} \, tr\left[-(-1)^F e^{-tm}\right]$$

$$(-1)^F = \begin{cases} -1 & \text{bosoni} \\ 1 & \text{fermioni} \end{cases}$$

Se la teo. contiene più particelle si introduce l'<u>op. di massa</u>.

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2(4\pi)^{D/2}} \int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{t^{D/2+1}} \sum_m tr\left[(-1)^F e^{-tm}\right]$$

Si può definire Str (<u>supertraccia</u>) $\quad str = tr.[(-1)^F \ldots]$
La m all'esponente è un operatore.

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{N} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dt}{t^{D/2+1}} \quad \mathrm{Str}\left(e^{-tm^2}\right) \qquad [2.34]$$

Calcoliamo ora $\mathrm{Str}(e^{-tm^2})$ per stringhe chiuse. Dobbiamo tenere conto del vincolo di level matching.

$$\mathrm{Str}\,(e^{-tm^2}) = \sum_s \langle s|\, e^{-\frac{2t}{\alpha'}(N+\tilde{N}-2)}\, \delta(N-\tilde{N})\,|s\rangle$$

gli $|s\rangle$ sono gli stati creati dagli oscillatori sul vuoto, sono una base completa. La $\delta(N-\tilde{N})$ è una delta discreta e introduce il vincolo. La si può scrivere come

$$\delta(N-\tilde{N}) = \int_{-1/2}^{1/2} dx\, e^{2\pi i (N-\tilde{N})x}$$

la $\sum_s$ è una somma sugli stati. Uno stato è caratterizzato non univocamente da N e $\tilde{N}$ c'è infatti una degenerazione che fa corrispondere più stati ad assegnati valori di N e $\tilde{N}$.

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{N} \int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dt}{t^{D/2+1}}\ \mathrm{tr}\left[e^{2\pi i x(N-\tilde{N})}\, e^{-\frac{2t}{\alpha'}(N+\tilde{N}-2)}\right]$$

cambiamo variabili $t \longrightarrow \pi\alpha' t$; $N \rightarrow N'$ cambia la normalizzazione.

$$\mathrm{tr}[\quad] \longrightarrow \mathrm{tr}\left[e^{2\pi i x(N-\tilde{N})}\, e^{-2\pi t(N+\tilde{N}-2)}\right]$$

definiamo $\begin{cases} \tau = x + it \\ \bar{\tau} = x - it \end{cases}$ si ha

$$\mathrm{tr}[\;\;] \longrightarrow \mathrm{tr}\left[e^{2\pi i \tau N} e^{-2\pi i \bar{\tau} \tilde{N}} e^{4\pi t} \right]$$

ed ora poniamo $q = e^{2\pi i \tau}$

$\bar{q} = e^{-2\pi i \bar{\tau}}$ $\qquad q\bar{q} = e^{-4\pi \tau_2}$

$$\mathrm{tr}[\;\;] \longrightarrow \mathrm{tr}\left[\frac{q^N \bar{q}^{\tilde{N}}}{q\bar{q}} \right]$$

$$E_0 = N \int \frac{d\tau\, d\bar{\tau}}{\mathrm{Im}(\tau)^{D/2-1}} \frac{1}{q\bar{q}} \mathrm{tr}(q^N \bar{q}^{\tilde{N}}) = N \int \frac{d\tau\, d\bar{\tau}}{\mathrm{Im}\tau^{D/2-1}} \frac{1}{q\bar{q}} \mathrm{tr}(q^N) \mathrm{tr}(q^{\tilde{N}})$$

la traccia $\mathrm{tr}(q^N \bar{q}^{\tilde{N}})$ è il prodotto di tracce perchè non c'è più il vincolo. Questa traccia la si calcola anche quando si studia il gas di Bose.

$$N = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k}^i \alpha_k^i \qquad i = 1, \dots, 24$$

$$\mathrm{tr}(q^N) = \left[\mathrm{tr}\, q^{\sum_1^\infty \alpha_{-k}^1 \alpha_k^1} \right]^{24}$$

gli α_k^i commutano per $i \neq j$ e hanno gli stessi autovalori.

$$= \left[\mathrm{tr}\, q^{\sum_1^\infty k a_k^+ a_k} \right]^{24} = \prod_{k=1}^{\infty} \left[\mathrm{tr}\, q^{k a_k^+ a_k} \right]^{24}$$

questo è lo stesso calcolo che si fa per un gas di Bose per calcolare le funzioni di grandpartizione

$$\mathrm{tr}(q^{k a_k^+ a_k}) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | q^{k a_k^+ a_k} | n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (q^k)^n = \frac{1}{1-q^k}$$

$$\mathrm{tr}(q^N) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^k)^{24}}$$

quindi si ha riassumendo

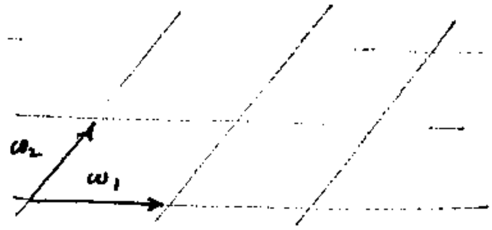
$$\mathcal{E}_0 = N \int \frac{d\tau\, d\bar{\tau}}{(\mathrm{Im}\,\tau)^{D/2+1}} \frac{1}{q\bar{q}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left[(1-q^k)(1-\bar{q}^k)\right]^{24}} \qquad [2.35]$$

i prodotti nell'integrale sono legati alle funzioni ellittiche.

2.10 Funzioni ellittiche e Funzioni Θ

Le funzioni ellittiche sono funzioni doppiamente periodiche. Per costruire funzioni doppiamente periodiche basta sommare i valori di una funzione su tutti i punti di un reticolo 2dim

$$F(z) = \sum_{n_1, n_2} f(z + n_1\omega_1 + n_2\omega_2)$$



(ω_1, ω_2) sono la base del reticolo.

Se la sommatoria converge si ha una funzione doppiamente periodica.

La funzione Θ è il "kernel di evoluzione della particella sul cerchio" o in altre parole una somma gaussiana. In generale si definiscono in questo modo

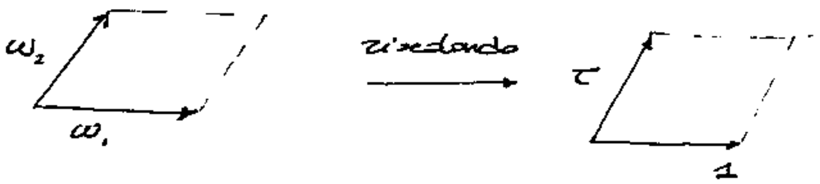
$$\Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(z|\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi\tau(n+\alpha)^2 + 2\pi i(n+\alpha)(z-\beta)} \qquad [236]$$

(funzione Θ di Jacobi)

$\tau = \tau_1 + i\tau_2$ $\quad$ $\tau \in \mathbb{C}$, $\tau_2 > 0$ $\quad$ α, β: caratteristiche

La parte immaginaria di τ_2 è positiva, quindi la somma converge: si ha una somma di termini che vanno a zero come delle gaussiane.

La Θ ha 2 proprietà. La Θ è legata alle funzioni doppiamente periodiche. Le funzioni dopp. periodiche sono definite su un reticolo, fissato da 2 vettori di base ω_1, ω_2. Nel caso di Θ, la variabile z può essere vista come una variabile di posizione (il punto da cui parte la somma sul reticolo); τ invece è legata alla definizione del reticolo. Più precisamente τ è il rapporto fra ω_1 e ω_2.



Quindi intuitivamente dovrebbe esserci un' "invarianza" per $\tau \to -\frac{1}{\tau}$. Il segno meno è dovuto al fatto che si sta lavorando con il piano complesso. Ad esempio se $\tau = ic$ allora mandare $\tau \to -\frac{1}{\tau}$ equivale invertire e riscalare i vettori di base.

Una seconda relazione semplice si ha per $\tau \to \tau + 1$

$$\Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(z|\tau+1) = e^{-i\pi\alpha(\alpha+1)}\,\Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta-\alpha-\frac{1}{2}\end{bmatrix}(z|\tau)$$

[2.37]

$$\Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}\left(\frac{z}{\tau}\Big|-\frac{1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{1/2} e^{-2\pi i\alpha\beta} e^{i\pi z^2/\tau}\,\Theta\begin{bmatrix}\beta\\ -\alpha\end{bmatrix}(z|\tau)$$

[2.38]

per una funzione ellittica $f(z+1) = f(z) = f(z+\tau)$, le Θ invece prendono delle fasi sotto queste trasformazioni. I prodotti di Θ però sono ellittiche, le fasi si cancellano. Le Θ sono quindi la base per costruire funzioni ellittiche: funzioni razionali di Θ sono funzioni ellittiche se la funzione risultante ha tanti zeri quanti poli (è una proprietà delle funz. dopp. periodiche).

2.11 CFT sul toro

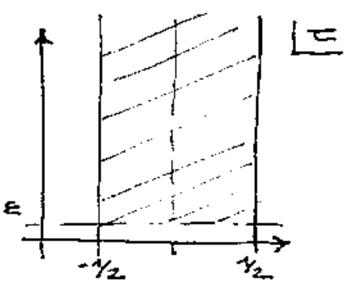
La funzione dentro l'integrando non è legata alle Θ ma a funzioni simili, la funzione η di Dedekind.

$$\eta(\tau) = q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$$

L'en. di vuoto può essere scritta come:

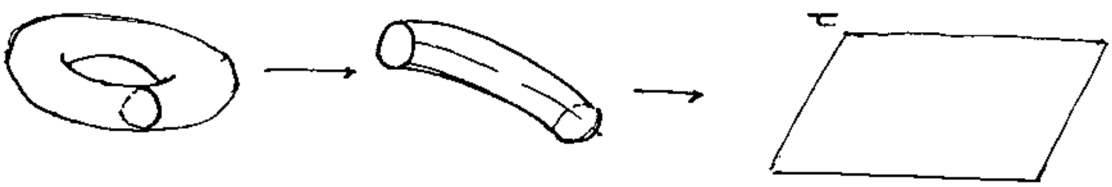
$$\mathcal{E}_0 = N\int \frac{d\tau\, d\bar\tau}{(\mathrm{Im}\,\tau)^{D/2+1}}\,\frac{1}{[\eta(\tau)\eta(\bar\tau)]^{24}} \qquad [2.39]$$

nel piano τ l'area di integrazione è:



Sulla striscia di piano τ su cui si svolge l'integrazione la funzione integranda assume infinite volte lo stesso valore. C'è una simmetria discreta infinita.

Il parametro τ è il parametro naturale che definisce una classe di tori.



Tagliare un toro e ridurlo ad un rettangolo equivale dal punto di vista della metrica a una trasformazione di Weyl che trasforma una metrica curva in una metrica piatta. Come si è visto l'azione di Polyakov è invarianti sotto trasformazioni di questo tipo (almeno alla dimensione critica $D = 26$). La metrica in entrambi i casi è caratterizzata dal fatto che

$$\int R \sqrt{g}\, d^2\xi = 0$$

Quello che si può vedere è che l'integrale E_0 trovato corrisponde ad un integrazione su di un toro. Il toro è la superficie che una stringa chiusa descrive in un loop di vuoto. Il toro è l'analogo per una stringa chiusa di un diagramma di vuoto d'una particella.

C'è un'ambiguità però nella direzione tempo. Valori diversi di τ possono corrispondere a diverse scelte della cella fondamentale di uno stesso reticolo.

Le scelte diverse dei reticoli si parametrizzano in termini di un gruppo discreto con infiniti elementi, questo gruppo prende il nome di $PSL(2,\mathbb{Z})$. L'invarianza legata a questo gruppo di trasformazioni è detta <u>invarianza modulare</u>.

L'integrando sarà periodico sotto le trasformazioni

$$\begin{cases} \tau \to \tau + 1 \\ \tau \to -\frac{1}{\tau} \end{cases} \qquad [2.40]$$

si può dim. che queste trasformazioni generano l'intero gruppo di trasformazioni della cella fondamentale che conservano il reticolo invariante.

Sotto le trasformazioni [2.40] la $\eta(\tau)$ trasforma in maniera semplice

$$\eta(\tau+1) = e^{\frac{i\pi}{12}}\,\eta(\tau)$$

$$\eta(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/24}\,\eta(\tau) \qquad [2.41]$$

~~2.12 Gruppo $PSL(2,\mathbb{Z})$~~

In generale si definisce una cella fondamentale di un reticolo assegnando due vettori ω_1 e ω_2. Si può definire una nuova cella fondamentale

$$\begin{cases} \vec{\omega}_1' = a\vec{\omega}_2 + b\vec{\omega}_1 \\ \vec{\omega}_2' = c\vec{\omega}_2 + d\vec{\omega}_1 \end{cases} \qquad a,b \in N$$

$$\frac{\vec{\omega}_2'}{\vec{\omega}_1'} = \frac{a\,\omega_2/\omega_1 + b}{c\,\omega_2/\omega_1 + d} = \tau'$$

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

se si vuole preservare l'area della cella fondamentale bisogna porre la condizione

$$\vec{\omega}_1' \times \vec{\omega}_2' = \begin{pmatrix} ad \\ bc \end{pmatrix} \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1$$

$$A = |\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2| = |(ad - bc)|\,|\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1|$$

Quindi la condizione

$$|ad - bc| = 1 \qquad [2.42]$$

definisce le trasformazioni che mappano celle fondamentali in celle fondam.

Queste trasformazioni si compongono mediante matrici

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \qquad \tau'' = \frac{a'\tau' + b'}{c'\tau' + d'}$$

$$\tau'' = \frac{a'\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) + b'}{c'\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) + d'} = \frac{a'(a\tau+b) + b'(c\tau+d)}{c'(a\tau+b) + d'(c\tau+d)} =$$

$$= \frac{(a'a + b'c)\tau + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)\tau + (c'b + d'd)}$$

~~consideriamo il prodotto di matrici~~

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix}$$

è appunto la legge di composizione trovata.

L'inversa di una trasformazione di questo tipo, dal momento che $\det M = 1$, è la matrice dei complementi algebrici cambiati di segno.

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} d' & -b' \\ -c' & a' \end{bmatrix}$$

Queste trasformazioni quindi formano un gruppo $PSL(2, \mathbb{Z})$. In questo gruppo gli elementi opposti sono identificati: se $(a, b, c, d) \to (-a, -b, -c, -d)$, $\tau \to \tau$. Questo è quindi un gruppo proiettivo (gruppo di trasformazioni proiettive special lineari).

Alle trasformazioni fondamentali è possibile associare matrici

$$\tau \to \tau + 1 \qquad M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tau \to -1/\tau \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si può dim. che l'intero gruppo di trasformazioni è generato da queste due, cioè che una trasformazione generica del gruppo può essere scritta come combinazione di potenze di queste due trasformazioni.

2.13 Fisica dell'ampiezza di vuoto

Vediamo come trasforma l'integrale [2.39] sotto le trasformazioni [2.40]

$$\tau = \tau_1 + i\tau_2 \qquad d\tau\, d\bar{\tau} = \left\| \begin{matrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{matrix} \right\| d\tau_1 d\tau_2 = 2\, d\tau_1 d\tau_2$$

$$e_0 = N \int \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\operatorname{Im} \tau^{D/2+1}} \frac{1}{[\eta(\tau)\eta(\bar{\tau})]^{24}}$$

1) sotto la trasformazione $\tau \to \tau + 1$

$$d\tau_1 d\tau_2 \to d\tau_1 d\tau_2$$

$$\operatorname{Im}\tau = \tau_2 \to \tau_2$$

$$\eta(\tau)\eta(\bar{\tau}) \to \eta(\tau)\eta(\bar{\tau}) \qquad \text{le fasi si cancellano.}$$

quindi l'int. è invariante

2) sotto la trasformazione $\tau \to -1/\tau$

$$\tau_1 + i\tau_2 \to \frac{1}{\tau_1 + i\tau_2} = \frac{\tau_1}{\tau\bar{\tau}} + i\frac{\tau_2}{\tau\bar{\tau}} = \frac{\tau}{\tau\bar{\tau}}$$

$$\operatorname{Im}\tau \to \frac{\operatorname{Im}\tau}{\tau\bar{\tau}}$$

$$d\tau\, d\bar{\tau}$$

consideriamo una trasformazione generica

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \qquad \frac{\partial \tau'}{\partial \tau} = \frac{a}{c\tau + d} - \frac{(a\tau + b)c}{(c\tau + d)^2} =$$

$$= \frac{a(\cancel{c\tau} + d) - c(\cancel{a\tau} + b)}{(c\tau + d)^2} = \frac{ad - bc}{(c\tau + d)^2}$$

per trasformazioni t.c. $ad - bc = 1$

$$\left|\frac{\partial \tau'}{\partial \tau}\right| = \frac{1}{|c\tau + d|^2}$$

considerando $\left|\frac{\partial \bar\tau'}{\partial \bar\tau}\right| = \left|\frac{\partial \tau'}{\partial \tau}\right|$ si ha lo Jacobiano

$$J = \left|\frac{\partial \tau'}{\partial \tau}\right|^2 = \frac{1}{|c\tau + d|^4}$$

per la trasf. $\tau \to -1/\tau$ si ha $b = 1,\ c = -1,\ a = d = 0$

$$d\tau d\bar\tau \longrightarrow \frac{d\tau d\bar\tau}{|\tau\bar\tau|^2}$$

riscriviamo l'integrale

$$\mathcal{E}_0 = N \int \frac{d\tau d\bar\tau}{(\Im m \tau)^{\frac{D+2}{2}}} \frac{1}{[\eta(\tau)\eta(\bar\tau)]^{24}} \xrightarrow{D=26} N \int \frac{d\tau d\bar\tau}{\tau_2^2} \frac{1}{[\sqrt{\tau_2}\,\eta(\tau)\eta(\bar\tau)]^{24}}$$

---

la misura $\frac{d\tau d\bar\tau}{\tau_2^2}$ è invariante sotto $PSL(2, \mathbb{Z})$

$$\frac{d\tau d\bar\tau}{\tau_2^2} \xrightarrow{\tau \to -1/\tau} \frac{d\tau d\bar\tau}{(\tau\bar\tau)} \cdot \frac{(\tau\bar\tau)}{\tau_2^2} = \frac{d\tau d\bar\tau}{\tau_2^2}$$

anche i termini del denominatore dell'integrando sono singolarmente invarianti. Ricordando le [2.41]

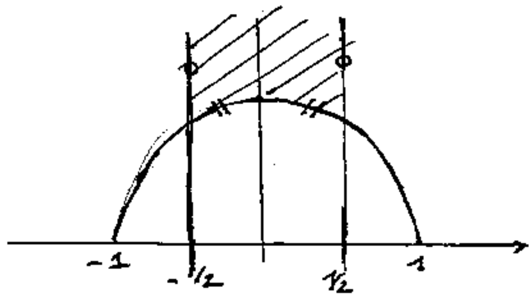
$$\tau_2 \longrightarrow \frac{\tau_2}{(\tau\bar\tau)}$$

$$\left[\sqrt{\tau_2}\,\eta(\tau)\eta(\bar\tau)\right] \longrightarrow \left[\frac{\sqrt{\tau_2}}{\cancel{\sqrt{\tau\bar\tau}}} \cancel{\sqrt{\tau\bar\tau}}\,\eta(\tau)\eta(\bar\tau)\right]$$

L'integrale è quindi invariante sotto il gruppo di trasformazioni $PSL(2, \mathbb{Z})$.

Considerate le simmetrie dell'integrando è possibile definire l'area di integrazione sul piano complesso τ che contiene tutti i possibili valori di τ. In questo modo si risolve il problema del multiple counting nell'integrazione.

La regione di integrazione è la porzione di striscia di piano τ fra $-1/2$ e $1/2$ limitata inferiormente dalla circonferenza di raggio unitario.



la trasformazione

$\tau \to -1/\tau$

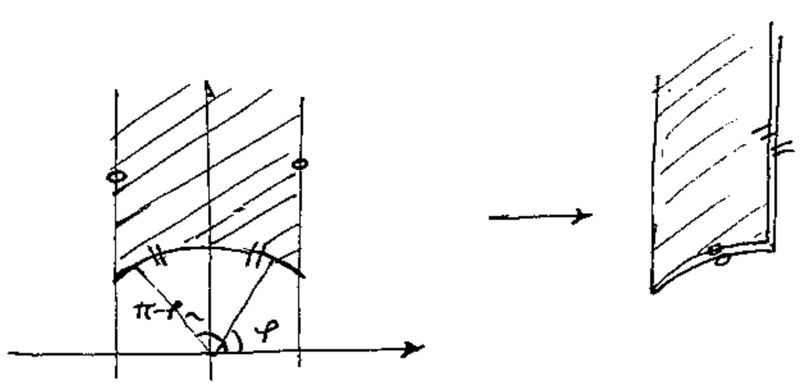
è una corrispondenza 1:1 fra i punti all'interno della semi circonf. e i punti del restante semipiano.

Ponendo $\tau = a e^{i\varphi}$, $a \in \mathbb{R}$, $\tau' = -\frac{1}{\tau} = -\frac{1}{a} e^{-i\varphi} = \frac{1}{a} e^{i(\pi-\varphi)}$. La trasf. $\tau \to \tau + 1$ mappa tutti i punti del piano all'interno della striscia compresa fra $-1/2$ e $1/2$. Quindi è corretto restringere l'area di integrazione a

$$|\tau| \geq 1 \qquad -1/2 \leq Re\,\tau - 1/2$$

Inoltre le trasformazioni identificano il bordo dx con il bordo sx, e l'arco di circonferenza dx con quello sx.

$$\tau = e^{i\varphi} \qquad \tau' = -\frac{1}{\tau} = e^{i(\pi-\varphi)}$$



consideriamo l'integrando

$$\frac{1}{[\eta(\tau)\eta(\bar\tau)]^{24}} = \frac{1}{q\bar q \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}(1-\bar q^n)^{24}} =$$

$$= \frac{1}{q\bar q}\left[1+24q+\frac{24\cdot 25}{2}q^2+\dots\right]\left[1+24q^2+\dots\right]\left[1+24\bar q+\frac{24\cdot 25}{2}\bar q^2\right]\cdot$$

$$\cdot\left[1+24\bar q^2+\dots\right] =$$

dove si è usata la formula di espansione

$$(1-x)^{-a} \cong 1+ax+a(a+1)\frac{x^2}{2}+\dots$$

$$= \frac{1}{q\bar q}\left[1+24(q+\bar q)+24q\bar q+\left(\frac{24\cdot 25}{2}+24\right)(q^2+\bar q^2)+\left(\frac{24\cdot 25}{2}+24\right)^2 q^2\bar q^2+\dots\right]$$

in questa serie formale le potenze di q e $\bar q$ di ciascun termine identificano uno stato, i coefficienti interi indicano la degenerazione dello stato. Nella serie compaiono anche stati non fisici.

Ad esempio

$24(q+\bar q)$ $\qquad N=1,\ \tilde N=0 \quad + \quad N=0,\ \tilde N=1$ $\Big\}$ sono stati non fisici $N\neq\tilde N$

$24\,q\bar q$ $\qquad N=1,\ \tilde N=1$ $\qquad$ 24 sono i modi in cui è possibile costruire lo stato.

2.14 Formule Asintotiche per la densita' degli stati

Le stringhe sono sistemi con densita' degli stati esponenzialmente crescente. Si ha un sistema statistico del tipo

$$\int e^{-\beta H(\epsilon)} \rho(\epsilon) d\epsilon = Z$$

con

$$\rho(\epsilon) \sim e^{\beta_0 \epsilon} \qquad \text{(asintoticamente)}$$

si ha, in questi casi, una temperatura critica definita dalla condizione $\beta > \beta_0$. Questa temperatura limite è calcolata considerando solo la densita' degli stati senza tener conto delle interazioni, ha quindi un valore parziale.

Consideriamo

$$\Delta = \frac{1}{q^{D/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^k)^D} = q^{-1/24} \left(\sum d_n q^n \right) \quad [2.43]$$

(poniamo nel calcolo $D = 1$ per semplicita', la generalizzazione è semplice).

Questa funzione come si è visto conta il n° di partizione degli interi ($d_n \in \mathbb{N}$), cioè il numero di modi di scrivere un intero come somma di numeri interi.

Ad esempio:

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} \sim (1+q+q^2+q^3)(1+q^2+\dots)(1+q^3+\dots)$$

usando la relazione: $(1-x)^{-1} = \sum_n \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} \frac{x^n}{n!}$

si ha quindi moltiplicando

$$\sim 1 + q + 2q + 3q^3 + \dots$$

quindi i coeff dell'espansione sono il numero di partizione degli interi all'esponente.

La cosa interessante è stimare

$$d_n \underset{n\to\infty}{\sim} \text{(formula di Hardy - Ramanujan)}$$

$$\lg \Delta = -\frac{1}{24}\log q - \sum_{n=1}^{\infty} \lg(1-q^n) \qquad q \in \mathbb{C}, \; |q| < 1$$

$$= -\frac{1}{24}\log q + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{nk}}{k} =$$

$$= -\frac{1}{24}\log q + \sum_{k\neq 1}^{\infty} \frac{1}{k}\frac{q^k}{(1-q^k)} =$$

(sommando la serie geometrica su n)

Questa espressione è dominata dagli n grandi per $q \sim 1$, si pone

$$q = 1 - \epsilon$$

$$q^k \simeq 1 - n\epsilon$$

$$\frac{1}{k}\frac{q^k}{1-q^k} \simeq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\frac{(1-k\epsilon)}{k\epsilon} \simeq \frac{1}{\epsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

$$\log \Delta \simeq -\frac{1}{24}\log q + \frac{1}{1-q}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

Questo è un caso della funzione ζ di Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^s} \qquad \mathrm{Re}\, s > 1 \qquad [2.44]$$

può essere estesa al piano complesso, si ha:

$$\int_0^{\infty} e^{-kt}\, t^{s-1}\, dt = \frac{\Gamma(s)}{k^s}$$

questa formula segue dalla definizione della Γ di Eulero

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1}\, dt \qquad Re\, s > 0 \qquad [2.45]$$

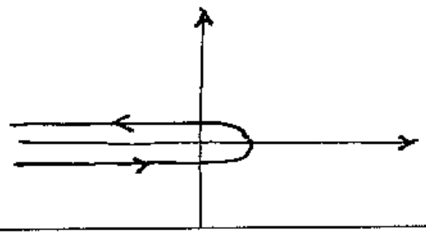
quindi

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty dt\, t^{s-1} e^{-kt}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt\, t^{s-1} \cdot \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \qquad \text{(risommando la serie geometrica)}$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt\, \frac{t^{s-1}}{1-e^{-t}} \qquad [2.46]$$

Questo tipo di integrali possono essere estesi al piano $\mathbb{C}$, integrando su contorni del tipo



La funzione di Rimann ζ ha un infinità di zeri in tutti gli interi pari negativi.

Esiste una formula che collega somme di $\zeta(s)$ con s intero pari a potenze di π. Esistono due formule per sen(z):

$$\text{sen}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \qquad [2.47]$$

$$= z \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \qquad [2.48]$$

E' facile convincersi che anche la seconda espressione è vera: è un prodotto di binomi che tendono molto rapidamente ad 1 (è convergente), ha un comp. all'origine questo, ha tutti gli zeri della funzione sen(z) (Teo. di unicità delle funz. analitiche) espandendo in z a piccolo ordine

$$\operatorname{sen} z \sim z - \frac{z^3}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + O(z^4) \qquad \text{(dalla seconda)}$$

$$\sim z - \frac{z^3}{6} \qquad \text{(dalla prima)}$$

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{(per confronto)}$$

risulta che

$$\log \Delta \simeq -\frac{1}{24} \log q + \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{1-q}$$

$$\Delta \simeq q^{-1/24} e^{\frac{\pi^2}{6} \frac{1}{1-q}}$$

la parte che conta la densita' degli stati e' quella esponenziale

$$\tilde{\Delta} = e^{\frac{\pi^2}{6} \frac{1}{1-q}}$$

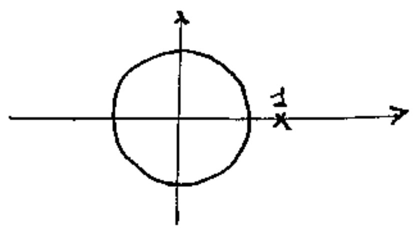
ha singolarita' essenziale a $q = 1$. La funzione iniziale [243]

$$\tilde{\Delta} = \frac{1}{\prod_1^{\infty} (1-q^k)} \longrightarrow \sum d_n q^n$$

per una funzione analitica il teo di Cauchy dice

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{dq}{q^{n+1}} \tilde{\Delta}(q)$$

dove l'integrazione e' estesa ad una curva chiusa che lasci fuori la singolarita' essenziale.



$$d_n \simeq \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dq}{q^{n+1}} e^{\pi^2/6 \frac{1}{1-q}} \simeq \frac{1}{2\pi i} \int dq \, e^{\frac{\pi^2}{6} \frac{1}{1-q} - (n+1) \log q}$$

si usa il metodo del punto di sella

$$f(q) = \frac{\pi^2}{6}\frac{1}{1-q} - (n-1)\log q$$

si cercano i punti critici della funzione di variabile complessa

(non ci sono né massimi né minimi)

$$f'(q) = \frac{\pi^2}{6}\frac{1}{(1-q)^2} - \frac{(n+1)}{q^2}$$

c'è un punto di sella, per $n \to \infty$ tende al punto singolare

$$\frac{(1-q)^2}{q} = \frac{\pi^2}{6(n+1)} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6n} \Longrightarrow 1-q \simeq \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$$

calcoliamo f nel punto di sella

$$f(q^*) = \frac{\pi^2}{6}\frac{\sqrt{6n}}{\pi} - (n+1)\log\left(1-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\right) \simeq \frac{\pi^2}{6}\frac{\sqrt{6n}}{\pi} - (n+1)\left(-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\right)$$

quindi

$$f(q^*) \simeq 2\pi\frac{\sqrt{n}}{6}$$

~~l'integrale~~

$$\int e^{f(z)}\,dz \simeq \int e^{f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)}\,dz \simeq e^{f(z_0)}\int e^{f'(z_0)(z-z_0)}\,dz$$

$$d_n \sim e^{2\pi\sqrt{\frac{n}{6}}} \qquad [2.49]$$

(Formula di Hardy - Ramanujan)

3. SUPERSTRINGHE

3.1 Azione di Superstringa

Le teorie di superstringhe vengono introdotte per superare i limiti della teoria di stringa bosonica. La teo. di stringa bosonica non contengono i fermioni, sono chiaramente complicate (compaiono i tachioni). In teo. di superstringhe questi limiti vengono superati e c'è la speranza di descrivere teo. di unificazione.

L'azione di superstringa può essere scritta nella forma

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \sqrt{\gamma} \left[\gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} + i \bar{\Psi}^\mu \gamma^a \nabla_a \Psi^\nu \eta_{\mu\nu} \right.$$
$$\left. + i \bar{\chi}_a \gamma^b \gamma^a \Psi^\mu \left(\partial_b X^\nu - \frac{i}{4} \bar{\chi}_b \Psi^\nu \right) \eta_{\mu\nu} \right] \qquad [3.1]$$

X^μ : coord. di stringa

Ψ : fermioni di Majorana

~~γ^a : vielbein~~

$\bar{\chi}_a$: gravitino (spin 3/2)

(1) Le γ^a hanno relazioni di anticommutazione

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\eta_{ab} \qquad [3.2]$$

formano cioè un algebra di Clifford.

$$\frac{1}{2}[\gamma_a, \gamma_b] = \gamma_{ab}$$

$$\gamma_{ab} = \begin{cases} 0 & a = b \\ \gamma_a\gamma_b & a \neq b \end{cases}$$

in $D=2$ una base conveniente è

$$\gamma_0 = i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad [3.3]$$

$$\gamma_1 = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

l'analogo di γ_5 in $D=4$ sarà

$$\gamma_3 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

si può definire come sempre (per D pari) l'op. di chiralità

$$\frac{1 \pm \gamma_3}{2} = P_\pm$$

(2) Uno spinore di Weyl descrive nel caso di massa nulla una particella e l'antiparticella con metà delle chiralità (ad esempio un neutrino sinistro e l'antineutrino destro), oppure descrive le due polarizzazioni di una particella che coincide con la sua antiparticella.

Uno spinore di Dirac è un oggetto che soddisfa l'equazione

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0$$

uno spinore di Weyl è uno spinore di Dirac che soddisfa la condizione di proiezione ($D=4$)

$$\frac{1 \pm \gamma_5}{2} \psi = 0$$

uno spinore di Majorana è definito da una "condizione di realtà".
Una trasf. di Lorentz generica per uno spinore è:

$$\psi \to \psi'(x') = e^{\frac{1}{4}\omega^{ab}\gamma_{ab}} \psi(x)$$

La Lagrangiana di Dirac per uno spinore è

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_\mu \partial^\mu \psi - m\bar{\psi}\psi$$

ridefinendo il campo

$$\Psi \to \Psi' = e^{i\alpha\gamma_5}\Psi$$
$$\Psi^+ \to \Psi^{+\prime} = \Psi^+ e^{-i\alpha\gamma_5}$$
$$\bar\Psi \to \bar\Psi' = \bar\Psi e^{+i\alpha\gamma_5}$$

(usando la proprieta' $\{\gamma_0,\gamma_5\}=0$)

sotto questa trasformazione

$$\mathcal{L}' = \bar\Psi e^{i\alpha\gamma_5}\gamma^\mu\partial_\mu e^{i\alpha\gamma_5}\Psi + m\bar\Psi\Psi e^{+2i\alpha\gamma_5}$$
$$= \bar\Psi\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + m\bar\Psi\Psi e^{2i\alpha\gamma_5}$$

il termine cinetico è invariante (ricordando $\{\gamma^\mu,\gamma^5\}=0$), non quello di massa. Il termine di massa non ha un significato "intrinseco", infatti possiamo scrivere (γ_5 è diag.)

$$e^{2i\alpha\gamma_5} = \begin{pmatrix} e^{2i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-2i\alpha}\end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha=\pi/2} \begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1\end{vmatrix}$$

come si vede sotto questa traf. cambia segno.

Uno spinore di Majorana è tale da soddisfare una condizione covariante del tipo:

$$\Psi \overset{?}{=} \bar\Psi$$

T.L. :

$$\Psi \to \Psi' = e^{\frac14\omega^{ab}\gamma_{ab}}$$
$$\Psi^+ \to \Psi^{+\prime} = \Psi^+ e^{\frac14\omega^{ab}\gamma_{ab}^+}$$
$$\Psi^{+T} \to \Psi^{+T\prime} = e^{\frac14\omega^{ab}\gamma_{ab}^{+,T}}\Psi^{+,T}$$

$$\bar\Psi = \Psi^+\gamma^0 \to \bar\Psi' = \Psi^+ e^{\frac14\omega^{ab}\gamma_{ab}^+}\gamma_0 = \bar\Psi e^{\frac14\gamma_0\gamma_{ab}^+\gamma_0\omega^{ab}}$$
$$= \bar\Psi e^{\frac14(\gamma_0\gamma_b^+\gamma_0)(-\gamma_0\gamma_a^+\gamma_0)\omega^{ab}}$$

$$\gamma_{ab}^+ = \gamma_b^+\gamma_a^+ \quad a\neq b$$
$$\gamma_0\gamma_\mu^+\gamma_0 = -\gamma_\mu$$

$$\bar\Psi \to \bar\Psi\, e^{+\frac{1}{4}(-\gamma_b)(-\gamma_a)\omega^{ab}} = \bar\Psi\, e^{-\frac{1}{4}\gamma_a\gamma_b\omega^{ab}}$$

si è trovato che $\bar\Psi$ trasforma con la matrice inversa. $\bar\Psi$ è un vettore riga, il vettore colonna corrispondente sarà

$$\bar\Psi^T \to e^{-\frac{1}{4}\omega^{ab}\gamma_{ab}^T}\,\bar\Psi^T = e^{-\frac{1}{4}\omega^{ab}\gamma_b^T\gamma_a^T}\,\bar\Psi^T$$

$$C\bar\Psi^T \to e^{-\frac{1}{4}\omega^{ab}C\gamma_b^T CC\gamma_a^T C}\,C\bar\Psi^T$$

infatti $C e^A C = e^{CAC}$ se $C^2 = 1$

Vogliamo che $C\bar\Psi^T$ trasformi come Ψ quindi occorre imporre una condizione sulle C

$$C\gamma_a^T C = \pm\gamma_a$$

- Cerchiamo C t.c. (in 4 dim, per esempio)

$$C\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu,T}$$

$$\gamma_0 = i\begin{pmatrix} 0 & 1\!\!1_2 \\ 1\!\!1_2 & 0\end{pmatrix} \qquad \gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & -i\sigma_1 \\ i\sigma_1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0\end{bmatrix} \qquad \gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i\sigma_3 \\ i\sigma_3 & 0\end{bmatrix}$$

γ_0, γ_2 sono simmetriche: γ_1, γ_3 sono antisimmetriche. La condizione da imporre diventa:

$$C\gamma^\mu C = \gamma^\mu \qquad \text{(per le antisimmetriche)}$$
$$C\gamma^\mu C = -\gamma^\mu \qquad \text{(per le simm.)}$$

C deve commutare con le γ^μ antisimmetriche e anticommutare con quelle simmetriche. Basta quindi che C sia il prodotto delle γ^μ simmetriche

$$C \sim \gamma_0\gamma_2$$

vogliamo anche che $C = C^{-1}$

in forma compatta

$$\gamma_0 = i\sigma_0 \otimes \mathbb{1}_2$$

$$\gamma_i = \sigma_2 \otimes \sigma_i$$

$$C \sim \begin{pmatrix} -\sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

- Proviamo ora a costruire C con il segno opposto nella relazione:

$$C\gamma^\mu C = \gamma^{\mu,T}$$

dovrà anticommutare con quelle antisimmetriche e commutare con quelle simmetriche.

$$C' \sim \gamma_1\gamma_3$$

$$C' \sim (\sigma_2)^2 \otimes (\sigma_1 \cdot \sigma_3) \sim \mathbb{1}_2 \otimes \sigma_2$$

$$C' = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

Proviamo ad imporre la condizione di Majorana su C e C'.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\psi} = i(\psi_2^+, \psi_1^+)$$

$$\overline{\psi}^T = i\begin{pmatrix} \psi_2^{+,T} \\ \psi_1^{+,T} \end{pmatrix}$$

$$C\overline{\psi}^T = i\begin{pmatrix} -\sigma_2\psi_2^{+,T} \\ \sigma_2\psi_1^{+,T} \end{pmatrix} = \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

$$C'\overline{\psi}^T = i\begin{pmatrix} \sigma_2\psi_2^{+,T} \\ \sigma_2\psi_1^{+,T} \end{pmatrix} = \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

- nel primo caso si ha:

$$\begin{cases} \psi_1 = -i\sigma_2\psi_2^{+,T} \\ \psi_2 = i\sigma_2\psi_1^{+,T} \end{cases} \Longrightarrow \psi_2^{+,T} = i\sigma_2\psi_1$$

e quindi $\psi_1 = \psi_1$ il sistema ammette autosoluzioni.

<u>Oss</u>: $\sigma_2^+ = \sigma_2 \qquad \sigma_2^T = -\sigma_2$

• nel secondo caso:

$$\begin{cases} \psi_1 = i\sigma_2 \psi_2^{*,T} \\ \psi_2 = i\sigma_2 \psi_1^{*,T} \end{cases} \implies$$ $\psi_1 = -\psi_1$, il sistema non ammette autosoluzioni.

In 4 dim. gli spinori di Majorana vengono definiti con C.
In dim > 4 possono giocare un ruolo sia C che C'. Lo spinore di Majorana trovato (in d = 4)

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ i\sigma_2 \psi_1^{*T} \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{\text{eq. ad un cambio di base}}{}} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ (spinore di Weyl)

A dim 2 modulo 8 questo non è vero. Le condizioni di Weyl e di Majorana sono indipendenti e compatibili.

L'azione di superstringa è

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\xi\,\sqrt{\gamma}\Big\{\gamma^{ab}\,\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} + i\,\bar{\Psi}^\mu \gamma^a \nabla_a \Psi^\nu \eta_{\mu\nu} +$$

$$+ i\,\bar{\chi}_a \gamma^b \gamma^a \Psi^\mu \big(\partial_b X^\nu - \frac{i}{4}\bar{\chi}_b \Psi^\nu\big)\eta_{\mu\nu}\Big\} \qquad [3.1]$$

Questa è una teoria di campi accoppiati alla gravita'. I campi bosonici sono accoppiati alla metrica sulla superficie γ^{ab}.
Per descrivere i fermioni in relatività si ricorre al formalismo del vielbein. I fermioni sono campi che per rotazioni di 2π, sul piano tangente allo spazio tempo curvo, cambiano segno.

Il vielbein è una matrice che proietta sullo spazio tangente.

$$\gamma_{ab} = e_a^{\ \alpha}\,\eta_{\alpha\beta}\,e_b^{\ \beta}$$

Si introduce poi oltre alla connessione di Christoffel, la "connessione di spin".

$$e^{\frac{1}{4}\omega^{ab}\gamma_{ab}}$$

Come si è visto nel caso dei bosoni è possibile, con una scelta opportuna delle coordinate disaccoppiare l'azione riducendosi a una teoria di fermioni e bosoni liberi.

Si può scegliere un gauge in cui il campo $\bar{\chi}_a$ del gravitino è puramente γ-traccia:

$$\bar{\chi}_a = \xi\gamma_a \qquad [3.4]$$

Quello che conta è il segno relativo fra le condizioni ai bordi, se ai bordi si hanno segni uguali (settore di Ramond), se hanno segno opposto (settore di Neveu-Schwarz).

- Scrivendo l'espansione nei modi di stringa chiusa

$$\psi_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_{1n}\, e^{-2in(\tau-\sigma)} \qquad (\text{Ramond}) \qquad [3.6]$$

$$\psi_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}+1/2} \psi_{1n}\, e^{-2in(\tau-\sigma)} \qquad (\text{Neveu-Schwarz}) \qquad [3.7]$$

Come è facile vedere ψ_1 cambia segno dopo un giro di π, nella (3.7) lo stesso si può scrivere per ψ_2.

- Nel caso di stringa aperta

$$\psi_1 = \sum \psi_{1,n}\, e^{-in(\tau+\sigma)}$$
$$\psi_2 = \sum \psi_{2,n}\, e^{-in(\tau-\sigma)}$$

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \Longrightarrow \psi_{1,n} = \psi_{2,n}$$

$$\psi_1(\pi) = \psi_2(\pi) \Longrightarrow \psi_{1,n}\, e^{-in\sigma\pi} = \psi_{2,n}\, e^{in\sigma\pi}$$

nella seconda condizione se $n\in\mathbb{Z}$ sono uguali i coefficienti, se $n\in(\mathbb{Z}+\frac{1}{2})$ i coeff. hanno un segno relativo di differenza.

- L'op. di massa

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha^i_{-n}\alpha^i_n + \frac{2}{\alpha'}\sum_{n\in\mathbb{Z}+1/2} n\,\psi^i_{-n}\psi^i_n \qquad (\text{N. S.}) \qquad [3.8]$$

$$= \quad // \quad + \frac{2}{\alpha'}\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\,\psi^i_{-n}\psi^i_n \qquad (R) \qquad [3.9]$$

dove la normalizzazione degli ψ^i_n è data dalle stesse regole degli op. di creazione e di distruzione di un oscillatore anticommutante

$$\{ \psi_m^i , \psi_n^j \} = \delta^{ij} \delta_{m+n,0}$$

Osservazione: supersimmetria e cost. cosmologica

oscillatore bosonico

$$[a, a^+] = 1$$

$$H = \frac{1}{2}(a^+ a + a a^+) = a^+ a + \frac{1}{2}$$

oscillatore fermionico

$$\{ a, a^+ \} = 1$$

$$H = \frac{1}{2}(a^+ a - a a^+) = a^+ a - \frac{1}{2}$$

I fermioni danno all'en. di vuoto un contributo opposto a quello dei bosoni. Se consideriamo le interazioni gravitazionali l'en. di vuoto indica la scala della curvatura metrica dell'universo (cost. cosmologica). Considerando la supersimmetria (ugual numero di fermioni e bosoni) la costante cosmologica si cancella.

(R) $n \in \mathbb{Z}$. $\psi_n \sim a$ $n > 0$ op. distruzione

$\psi_n \sim a^+$ $n < 0$ op. creazione

$\psi_0 \sim$ matrici γ soddisfano l'algebra di Clifford.

(N.S.) $n \in (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$ $\psi_n \sim a$ $n > 0$

$\psi_n \sim a^+$ $n < 0$

Il vuoto nei due settori è differente: nel settore di Ramond è uno spinore che può essere mappato in se stesso dai ψ_0

$$(\psi_0^i)_\beta{}^\gamma |0\rangle_\gamma = (\gamma^i)_\beta^\gamma |0\rangle_\gamma$$

Il vuoto del settore N.S. invece ha una sola componente.

- Nel caso di stringa chiusa

(N.S, N.S.)	$\|0\rangle_{NS} \otimes \|\tilde{0}\rangle_{NS}$	bosoni
(NS, R), (R, NS)	$\|0\rangle_{NS} \otimes \|\tilde{0}\rangle_{R}$ $\|0\rangle_{R} \otimes \|\tilde{0}\rangle_{NS}$	fermioni
(R, R)	$\|0\rangle_{R} \otimes \|0\rangle_{R}$	bosoni

il settore (R, R) è difficile da interpretare.

si è trovato [2.34]

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2(4\pi)^{D/2}} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dt}{t^{D/2+1}} \sum_m \mathrm{tr}\left[(-1)^F e^{-tm}\right]$$

per la stringa chiusa l'eq. di massa portava alle espressioni

$$M^2 = M_L^2 + M_R^2$$

$$M_L^2 - M_R^2 = 0$$

introducendo il vincolo con una funzione delta (vedi p. 47~49) si arriva ad un espressione del tipo

$$\mathrm{tr}\left[(-)^F q^N \bar{q}^{\bar{N}}\right] \qquad q = e^{2\pi i(x+it)}$$

Occorre riordinare la eq. di massa come visto

$$M_{bos.} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_{-n}^i \alpha_n^i - \frac{D-2}{12}\right]$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i - \frac{D-2}{12}\right]$$

si può facilmente dim. (esercizio I.1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\theta) = -\frac{1}{12}\left[1-6\theta(1-\theta)\right] \qquad [3.10]$$

$$\theta = 0 \qquad = -\frac{1}{12}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \qquad = \frac{1}{24}$$

• Nel settore di Neveu-Schwarz

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}\left[2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{-n}^i\alpha_n^i - \frac{D-2}{12} + 2\sum_{n=1/2}^{\infty} n\psi_{-n}^i\psi_n^i - \frac{D-2}{24}\right] \qquad [3.11]$$

infatti:

$$\sum_{n=1/2}^{\infty} n\psi_{-n}^i\psi_n^i + \sum_{n=-1/2}^{-\infty} n\psi_{-n}^i\psi_n^i = \sum_{n=1/2}^{\infty} n\psi_{-n}^i\psi_n^i + \sum_{n=1/2}^{\infty} -n\psi_n^i\psi_{-n}^i =$$

$$= 2\sum_{n=1/2}^{\infty} n\psi_{-n}\psi_n - (D-2)\sum_{1/2}^{\infty} n = 2\sum_{n=1/2}^{\infty} n\psi_{-n}\psi_n - \frac{(D-2)}{24}$$

• Nel settore di Ramond

$$(D-2)\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{(D-2)}{12} \qquad \text{per cui dalla } [3.9]$$

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}\left[2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{-n}^i\alpha_n^i - \cancel{\frac{D-2}{12}} + 2\sum_{n=1}^{\infty} n\psi_{-n}^i\psi_n + \cancel{\frac{D-2}{12}}\right] \qquad [3.12]$$

• Quindi riassumendo

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}\left[N_B + N_F - \frac{D-2}{16}\right] \qquad (NS) \qquad [3.13]$$

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}\left[N_B + N_F\right] \qquad (R) \qquad [3.14]$$

3.3 Spettro di superstringa chiusa

nella stringa chiusa i vuoti possibili sono 4

$$|0_{NS}, \tilde{0}_{NS}\rangle \xrightarrow{M} M^2 = -\frac{(D-2)}{4\alpha'}$$

$|0_{NS}, \tilde{0}_{R}\rangle$
$|0_{R}, \tilde{0}_{NS}\rangle$
] questi due stati non soddisfano la condizione di level matching.

$$|0_R, 0_R\rangle \xrightarrow{M} M^2 = 0$$

- settore (NS, NS)

lo stato fisico di massa più basso è

$\psi^i_{-1/2}\, \psi^j_{-1/2}\, |0_{NS}, \tilde{0}_{NS}\rangle \qquad M^2 = \frac{4}{\alpha'}\left[\frac{1}{2} - \frac{D-2}{16}\right]$

questo stato è l'analogo di un bosone W^μ senza componente longitudinale. Questo non ha senso, occorre che $M = 0$.

si deve avere:

$$D = 10$$

Possiamo come fatto per la stringa bosonica (p. 39)

$\tilde{T}^{ij} \longleftrightarrow h^{ij}$ (tensore simm. a traccia nulla)

$T^{[ij]} \longleftrightarrow B^{ij}$

$\delta_{ij} T^i{}_j \longleftrightarrow \phi$ dilatone

Come si è visto in questo settore compare ancora il tachione

$$M^2 = -\frac{2}{\alpha'}$$

• settori (NS, R), (R, NS)

$|0_{NS}, \tilde{0}_R\rangle$ il vuoto a sx $M^2 = -\frac{2}{\alpha'}$, il vuoto a dx $M^2 = 0$

quindi gli stati fermi più bassi sono

$$\left.\begin{array}{l}\lambda^i_{-1/2}\,|0_{NS}, \tilde{0}_R\rangle \\ \tilde{\lambda}^i_{-1/2}\,|0_R, \tilde{0}_{NS}\rangle\end{array}\right\}\ \text{ora a dx e sx } M^2 = 0$$

questi stati sono fermioni e vettori (spinor-vettore e spinore). Per separare gli stati occorre tirar fuori la γ-traccia. Quello che si vede è che la parte a γ-traccia nulla descrive le pol. di un campo di spin 3/2, il gravitino; la parte di γ-traccia descrive le polarizzazioni di uno spinore di chiralità opposta. Infatti moltiplicando la γ-traccia per una γ, per ottenere il campo, si inverte la chiralità.

3.4 Spettro di stringa aperta

Nella stringa aperta si ha solo 1 set. di oscillatori

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}\left[N_B + N_F - \frac{(D-2)}{16}\right] \qquad (NS) \qquad [3.15]$$

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}\left(N_B + N_F\right) \qquad (R) \qquad [3.16]$$

• settore NS

$$|0\rangle_{NS} \xrightarrow{M^2} M^2 = -\frac{D-2}{16\alpha'} \qquad \text{(tachione)}$$

$$\lambda^i_{-1/2}\,|0\rangle_{NS} \quad \xrightarrow{\;\mathcal{M}^2\;} \quad \frac{1}{\alpha'}\left[\frac{1}{2}-\frac{D-2}{16}\right] = \mathcal{M}^2$$

allo stesso modo $\mathcal{M}^2 \equiv 0 \Rightarrow D = 10$ (dim. critica)

c'è un problema nella teoria di spin-statistica lo stato vettore ha simm. opposta del tachione.

3.5 Funzione di partizione di stringa chiusa

La funzione di partizione è l'analogo del diagramma di vuoto di una particella. Nella stringa il diag. di vuoto di una stringa chiusa è un toro. Su di un toro la scelta del tempo non è unica. Tutte le infinite scelte possibili per identificare il tempo devono essere equivalenti, questa è la condizione di invarianza modulare.

Calcoliamo le tracce

$$\int \frac{d^2\tau}{\tau_2^2}\ \mathrm{tr}\left[q^{N_B+N_F-\frac{1}{2}}\right]\left[\bar q^{\bar N_B+\bar N_F-\frac{1}{2}}\right] \qquad \tau \in \begin{cases} |\tau| > 1 \\ -\frac{1}{2} \le |\tau| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

(dip. dal settore)

$$\tau = \tau_1 + i\tau_2$$

$$\mathcal{M}^2 = \frac{2}{\alpha'}\left[N_B + N_F + \bar N_B + \bar N_F + (\text{shift})\right]$$

ci sono 2 tracce da calcolare a seconda del settore

$$\mathrm{tr}_{NS}\left[q^{N_B+N_F-\frac{1}{2}}\right]$$

$$\mathrm{tr}_R\left[q^{N_B+N_F}\right]$$

- $\mathrm{tr}_{NS}\left[q^{N_B+N_F-\frac{1}{2}}\right] = \dfrac{1}{\sqrt{q}}\ \mathrm{tr}\left[q^{N_B}\right]\mathrm{tr}\left[q^{N_F}\right]$

$N_B = \sum_n n\, a_n^{+i} a_n^i$ (bosoni)

$$\mathrm{tr}\, q^{N_B} = \left(\mathrm{tr}\left[q^{\sum n\, a_n^+ a_n}\right]\right)^8 =$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{tr}\left(q^{n a_n^+ a_n}\right)\right)^8$$

$$\mathrm{tr}\, q^{n a_n^+ a_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \langle k | q^{n a_n^+ a_n} | k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} q^{nk} = \frac{1}{1-q^n}$$

$$\mathrm{tr}\, q^{N_B} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)^8}$$

$$\mathrm{tr}\left[q^{N_F}\right] \xrightarrow{NS} \mathrm{tr}\, q^{\sum_{r=1/2}^{\infty} r\, \psi_{-r}^i \psi_r^i} = \left(\mathrm{tr}\, q^{\sum_{1/2}^{\infty} r\, \psi_{-r}\psi_r}\right)^8$$

$$= \prod_{1/2}^{\infty} \left(\mathrm{tr}\, q^{r \psi_{-r}\psi_r}\right)^8$$

in questa traccia ci sono solo 2 contributi $|0\rangle$ e $|1\rangle$

$$\langle 0| q^{r\psi_{-r}\psi_r} |0\rangle + \langle 1| q^{r\psi_{-r}\psi_r} |1\rangle = 1 + q^r$$

$$\Rightarrow \; = \prod_{r=1/2}^{\infty} (1+q^r)^8$$

$\xrightarrow{R}$ la traccia sugli stati comprende anche il contributo degli zero modi, ma il vuoto ha degenerazione di uno spinore

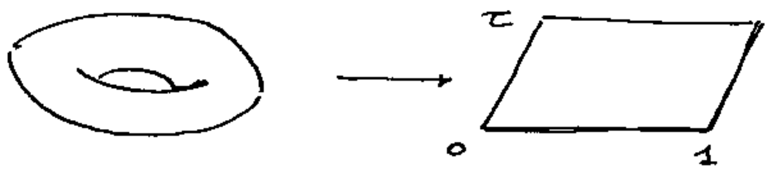
$$2^{8/2} = 16$$

$$= 16 \prod_{r=1}^{\infty} (1+q^r)^8$$

$$\mathrm{tr}_{NS}\left[q^{N_B+N_F-1/2}\right] = \frac{1}{\sqrt{q}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^{n-1/2})^8}{(1-q^n)^8} \qquad [3.17]$$

$$\mathrm{tr}_{R}\left[q^{N_B+N_F}\right] = 16 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^n)^8}{(1-q^n)^8} \qquad [3.18]$$

Per ottenere un risultato invariante modulare occorre imporre a costruire tutti gli invarianti modulari possibili nel caso fermionico.



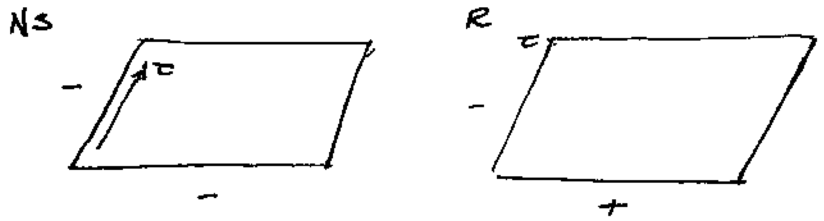
il settore di N.V è antiperiodico lungo la direzione (0,1) spaziale, il settore R è periodico. Ma le direzioni perché si rispetti l'invarianza modulare, devono essere equivalenti, quindi anche lungo τ deve essere possibile porre condizioni di periodicità.

Ci sono quindi 16 possibilità: 4 per i modi sinistri e 4 per quelli destri.

Se si considera un fermione e se ne calcola la funzione di partizione, si ha un int. funzionale che è antiperiodico nella direzione che definisce la temperatura, per un bosone è periodico. Questo perché l'int. funzionale si calcola l'ampiezza del passaggio da uno stato iniziale ad uno finale, per calcolare la traccia si identifica lo stato iniziale con quello finale e si somma sugli stati. Gli op. fermionici sono antiperiodici; quindi ciclandoli nella traccia si prende un segno meno, ma ciclarlo nella traccia significa portarlo avanti nel tempo. (?)

La prescrizione naturale è quindi quella di considerare i bosoni periodici nella direzione verticale, i fermioni antiperiodici.

implicitamente i bosoni si sono calcolati da pertutto come periodici, i fermioni come antiperiodici



Per calcolare la traccia periodica nel caso fermionico occorre inserire un fattore (-1)

$$N_F \longrightarrow (-1)\, N_F$$

questo cambia segno agli stati costruiti con un n. dispari di fermioni.

$$\mathrm{tr}_{NS}\left[(-1)^F q^{N_B+N_F-1/2}\right] = \frac{1}{\sqrt{q}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{n+1/2})^8}{(1-q^n)^8} \qquad [3.19]$$

quello che succede è che cambia il segno di tutti i q che si riferiscono a stati di n° dispari di op. fermionici.

ad es.

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n+1/2}) \sim (1-q^{1/2})(1-q^{3/2})(1-q^{5/2})\dots$$

$$\sim 1 - q^{1/2} - q^{3/2} + q^{1/2}q^{3/2} + \dots$$

vuoto, $\lambda_{-1/2}|0\rangle$, $\lambda_{-3/2}|0\rangle$, $\lambda_{-1/2}\lambda_{-3/2}|0\rangle$ $\Big\}$ stati creati

$$\mathrm{tr}_R \left[(-)^F \left(q^{N_B + N_F} \right) \right] = 0 \qquad [3.20]$$

3.6 Operatore Numero fermionico

l'op. numero fermionico è fatto in modo da antcommutare con tutti i ψ

$$(-1)^{\sum_{r}^{\infty} \psi_{-r}^{i} \psi_{r}}$$

es. in 1 dim.

$$e^{i\pi a^+ a}\, a \;\rightarrow\; e^{i\pi a^+ a}\, a\, e^{-i\pi a^+ a}\, e^{i\pi a^+ a}$$

$$e^{i\pi a^+ a}\, a\, e^{-i\pi a^+ a} = a + i\pi [a^+ a, a] + \dots$$

$$[a^+ a, a] = \cancel{a^+ a a} - \{a, a^+\} a + \cancel{a^+ a a}$$

quindi calcolando si ha:

$$= a + i\pi a + \frac{1}{2} (i\pi)^2 [a^+ a, \underbrace{[a^+ a, a]}_{a}] + \dots$$

$$= a\, e^{-i\pi}$$

si ha: $\quad e^{i\pi a^+ a}\, a\, e^{-i\pi a^+ a} = -a \qquad$ (anticommutano a e l'op. numero)

questa proprietà di coniugio vogliamo valga per l'intero campo, non solo per i non-zero modi.

$$\text{Op. numero ferm.} = (-1)^{-i \sum_{1}^{\infty} \psi_n^i \psi_n^0 + \underbrace{\sum (\psi_0^i)^2}}$$

$$\{\psi_0^i, \psi_0^j\} = \delta^{ij}$$

scrittura non chiara!

$\Sigma\, \psi_0^i$ indica un oggetto che agisce sugli ψ_0^i cambiando segno ; si tratta dell'analogo di γ_5 : γ_9 (gli ψ_0^i come visto hanno l'algebra delle γ^i)

$$(-1)^F = (-)^{\sum_{i,n} \psi_{-n}^i \psi_n^i}\, \gamma_9$$

ma abbiamo che

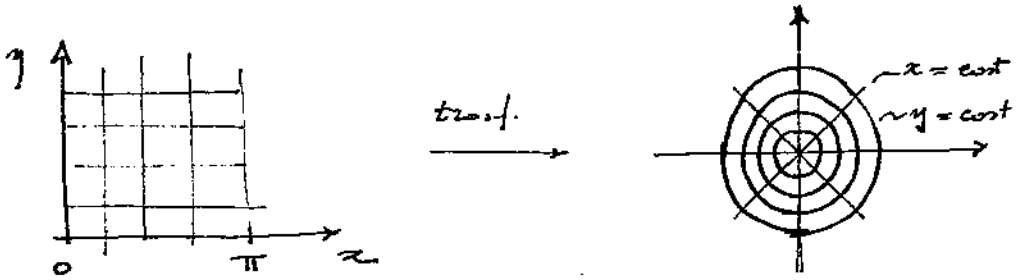
$$\mathrm{tr}\, \gamma_9 = 0$$

16/04/2004

<u>Precisazione</u>: "fermioni di teo. di superstringa e traf. conformi."

se in una teoria conforme si ha una trasformazione

$$w = e^{-2iz}$$
$$|w| = e^{2y}$$



i campi della teoria trasformano come <u>campi primari</u>, ad es.

$$v^{\mu\prime}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} v^{\nu}(x)$$

più in generale con indici di coordinate complesse (per campi in $d=2$) si ha (generalizzazione di mat. tensoriale):

$$v_{z_1 \dots z_h \bar{z}_1 \dots \bar{z}_{\bar{h}}} = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^h \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{h}} v_{w_1 \dots w_h \bar{w}_1 \dots \bar{w}_{\bar{h}}}$$

I campi primari sono campi che trasformano in questo modo, sono cioè tensori del gruppo conforme (vedi appendice su teorie conformi).

Possiamo anche considerare trasformazioni di questo genere con h e $\bar{h}$ non interi. Questo è il caso degli spinori nelle teorie di superstringa.

Per un campo spinoriale (di peso conforme 1/2) si ha:

$$\lambda(z) = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{1/2} \lambda'(w)$$

per una trasformazione esponenziale del tipo visto

$$w = e^{2z} \qquad \frac{dw}{dz} = 2w$$

$$\lambda(z) = 2w^{1/2}\lambda(w)$$

Si vede subito che se $\lambda(z)$ è periodico, $\lambda(w)$ non lo è.
Il settore di N.S. è antiperiodico sulla striscia e quindi è periodico nel piano, il settore di R è periodico sulla striscia e quindi nel piano è antiperiodico.

Una funzione come $\sqrt{z}$ che cambia segno girando intorno all'origine è definita con un taglio nel piano complesso.

3.6 Condizione GSO

Abbiamo ottenuto una costruzione della teoria che coinvolge sia coordinate bosoniche che fermioniche. Consideriamo per semplicità il settore di N.S. di stringa aperta, gli stati saranno:

(scalare) $|0\rangle$

(vettore) $\lambda^i_{-1/2}|0\rangle$

(tensore ant.) $\lambda^i_{-1/2}\lambda^j_{-1/2}|0\rangle$

(vettore) $\alpha_{-1}|0\rangle$

} questi due stati alzano in massa della stessa quantità

(...)

Come si vede c'è un problema nella teoria di spin-statistica: i due stati vettoriali (sono creati da op. di statistica opposta) hanno statistica opposta.

Per rendere consistente la teoria ci sono due possibilità: o si considera solo uno dei due o si usano due vuoti con statistiche opposte (questo avviene per compattificazioni di stringhe più complicate). Nella superstringa a 10 dim. invece si realizza la prima possibilità si ha una riduzione del n° di stati che si possono avere. (Proiezione GSO)

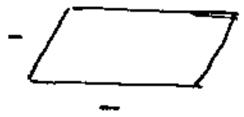
Per proiettare gli stati si usa l'operatore $(-1)^F$. Come si è visto questo operatore agisce sugli ψ^i cambiandogli segno e sugli α^i lasciandoli invariati. Questa proprietà def. l'op. $(-1)^F$ a meno di un segno. Questo segno può essere fissato assegnando per lo stato vettoriale di massa nulla valore +1. Quindi per un generico stato

$$\psi^{i_1}_{-1/2}\,\psi^{i_2}_{-1/2}\cdots\psi^{i_n}_{-1/2}\,|0\rangle$$

$$(-1)^F=(-1)^n$$

La proiezione GSO utilizza l'operatore numero fermionico per ottenere teorie con spettri coerenti.

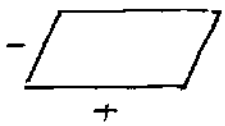
Consideriamo stringhe chiuse, le regole di proiezione sono dettate dall'invarianza modulare.
Si erano trovate le tracce (usando anche l'op. n° fermionico)

1) 

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{q}}\frac{(1+q^{n-1/2})^8}{(1-q^n)^8} \qquad [3.21]$$

2) 

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{n-1/2})^8}{(1-q^n)^8} \qquad [3.22]$$

3) 

$$16\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+q^n)^8}{(1-q^n)^8} \qquad [3.23]$$

4)  quest'ultima traccia $= 0$ [3.24]

Per scrivere in forma compatta le ampiezze è utile usare le funzioni teta, ricapitoliamone brevemente le proprietà.

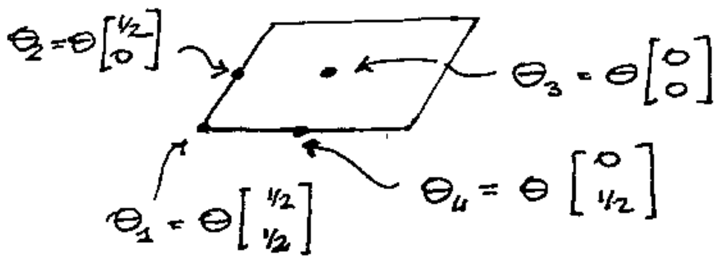
$$\Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(z|\tau) \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi\tau(n+\alpha)^2 + 2\pi i(n+\alpha)(z-\beta)} \qquad [3.25]$$

trasf. modulari

$$\Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(z|\tau+1) = e^{-i\pi\alpha(\alpha+1)}\,\Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta+\alpha-1/2\end{bmatrix}(z|\tau) \qquad [3.26]$$

$$\Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}\left(\frac{z}{\tau}\Big|-\frac{1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{1/2} e^{-2\pi i\alpha\beta}\, e^{i\pi\frac{z^2}{\tau}}\,\Theta\begin{bmatrix}\beta\\ -\alpha\end{bmatrix}(z|\tau) \qquad [3.27]$$

le teta hanno uno zero nella cella primaria, gli zeri delle caratteristiche sono



rappresentazione in prodotto

$$\Theta_1(z|\tau) = 2\sin\pi z\, q^{1/8}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1-q^n e^{2\pi i z})(1-q^n e^{-2\pi i z})$$

$$\Theta_2(z|\tau) = 2\cos\pi z\, q^{1/8}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+q^n e^{2\pi i z})(1+q^n e^{-2\pi i z})$$

$$\Theta_3(z|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n-1/2}e^{2\pi i z})(1+q^{n-1/2}e^{-2\pi i z})$$

$$\Theta_4(z|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n-1/2}e^{2\pi i z})(1-q^{n-1/2}e^{-2\pi i z})$$

Le tracce possono essere ora scritte in forma compatta

1) $\dfrac{\Theta_3^4(0|\tau)}{\eta^4(\tau)}$

2) $\dfrac{\Theta_4^4(0|\tau)}{\eta^{12}(\tau)}$

3) $\dfrac{\Theta_2^4(0|\tau)}{\eta^{12}(\tau)}$ [3.28]

4) $\dfrac{\Theta_1^4(0|\tau)}{\eta^{12}(\tau)} = 0$

Si hanno le trasf. modulari:

$$\Theta_3(0|\tau+1) = \Theta_4(0|\tau) \iff \Theta_4(0|\tau+1) = \Theta_3(0|\tau)$$

$$\Theta_2(0|\tau+1) = e^{i\pi/4}\Theta_2(0|\tau)$$

$$\Theta_1(0|\tau+1) = e^{i\pi/4}\Theta_1(0|\tau)$$

$$\Theta_3(0|-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\Theta_3(0|\tau)$$

$$\Theta_4(0|-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\Theta_2(0|\tau)$$

$$\Theta_2(0|-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\Theta_4(0|\tau)$$

$$\Theta_1(0|-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\Theta_1(0|\tau)$$

Osservazione: la logica di queste trasformazioni la si può capire osservando che $\tau \to -1/\tau$ eq. a scambiare i due lati del rettangolino di definizione della cella.

Dal momento che $\tau \in \mathbb{C}$ c'è ambiguità nella scelta della radice quadrata. Lo stesso succede per la funzione $\eta(\tau)$

$$\eta(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\eta(\tau)$$
$$\eta(\tau+1) = e^{i\pi/12}\,\eta(\tau)$$

Si sceglie la determinazione della radice tale che se τ è puramente immaginario $\eta(\tau)$ deve essere reale e positiva

$$|\tau|^{1/2} e^{i(\theta/2-\pi/4)+ik\pi} = (-i\tau)^{1/2}$$

$$\theta \to \pi/2 \qquad |\tau|^{1/2} e^{ik\pi} \qquad k=0$$

La funzione di partizione per la superstringa chiusa sarà in generale:

$$\int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\tau_2^2}\,\frac{1}{\tau_2^4\,\eta^{12}} \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}\,\Theta_\alpha^4(0|\tau)\,\bar{\Theta}_\beta^4(0|\bar{\tau}) \qquad [3.29]$$

A priori cioè ci sono 16 termini, cioè la combinazione più generale con coeff. $c_{\alpha\beta}$ delle Θ che sia invariante modulare.

Le $c_{\alpha\beta}$ saranno n° interi perché contano il n° di particelle che girano nel loop, in più ci si aspetta che le $c_{\alpha\beta}$ associate ai fermioni spazio temporali abbiano segno meno (come noto i fermioni nei loop girano con segno meno). I fermioni spazio-temporali sono legati alle Θ_2 e Θ_3. Quindi per $\alpha=2$, $\beta=3$ o $\alpha=3$, $\beta=2$, $c_{\alpha\beta}<0$. Il coeff. dell'id. in una teoria conforme è sempre 1, quindi il coeff 3,3 è uno.

Conviene introdurre 4 "caratteri":

$$O_8 = \frac{1}{2\eta^4}\left(\Theta_3^4 + \Theta_4^4\right)$$

$$V_8 = \frac{1}{2\eta^4}\left(\Theta_3^4 - \Theta_4^4\right) \qquad \longleftrightarrow \ \mathrm{tr}\left[\frac{1 \pm (-)^F}{2} q^N\right]_{NS}$$

$$S_8 = \frac{1}{2\eta^4}\left(\Theta_2^4 + \Theta_1^4\right) \qquad [3.30]$$

$$C_8 = \frac{1}{2\eta^4}\left(\Theta_2^4 - \Theta_1^4\right) \qquad \longleftrightarrow \ \mathrm{tr}\left[\frac{1 \pm (-)^F \gamma_{11}}{2} q^N\right]_R$$

Un carattere è una funzione di q tale che:

$$f \sim q^\alpha \sum d_n q^n$$

cioè differisce da una serie di Taylor al più per un fattore con una potenza algebrica. Quindi per $q \to q e^{i\alpha}$ il carattere si riproduce a meno di una fase.

Vediamo ad es. il settore di N.S.

$$\frac{1}{\eta^8}\frac{\Theta_3^4 \pm \Theta_4^4}{2\eta^4} = \frac{\prod(1+q^{n-1/2})^8 \pm \prod(1-q^{n-1/2})^8}{\sqrt{q}\,\prod_n(1-q^n)^8}$$

i termini con + saranno somme di termini q^n, quelli con − somme di termini $q^n/\sqrt{q}$ (considerando il numeratore). Tenendo conto anche del $\sqrt{q}$ al denominatore si hanno con segno + potenze semintere, con segno − potenze intere di q.

Si sono quindi divisi gli stati in due categorie: in una ci sono gli stati costruiti con op. bosonici e con un n° pari di op. fermionici, nell'altra gli stati costruiti con un numero dispari di op. fermionici.

I "building blocks" della teoria sono quindi i

$$\frac{\theta_\alpha^4}{\eta^{12}}$$

Da questi si è costruita una base semplice. Le lettere con cui si sono indicati i caratteri alludono agli oggetti che si trovano al livello di massa più basso

$O_8 \longrightarrow$ scalare

$V_8 \longrightarrow$ vettore

$S_8 \longrightarrow$ spinore di Weyl sx

$C_8 \longrightarrow$ spinore di Weyl dx

Possiamo definire $\tilde{O}_8, \tilde{V}_8, \tilde{S}_8, \tilde{C}_8$ moltiplicando O_8, V_8, S_8, C_8 per $(\eta^8 \tau_2^4)^{-1}$. Questo fattore è irrilevante per trasformazioni $S: \tau \to -1/\tau$ ma non per $T: \tau \to \tau + 1$ in cui compare una fase. Si ha (esercizio IV.4)

$$\chi_i = \begin{bmatrix} \tilde{O}_8 \\ \tilde{V}_8 \\ \tilde{S}_8 \\ \tilde{C}_8 \end{bmatrix} \xrightarrow[T]{\tau \to \tau+1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \chi_i \qquad [3.31]$$

$$\chi_i \xrightarrow[S]{\tau \to -1/\tau} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad [3.32]$$

La più generale funzione sesquilineare sarà

$$\sum_{ij} \bar{x}_i M^{ij} x_j = x^+ M x$$

Le matrici delle trasf T ed S sono hermitiane e tali che $S^2 = T^2 = 1$, le condizioni di invarianza modulare sono

$$TMT = M$$
$$SMS = M$$

- Osserviamo la prima; T agendo da sx cambia segno alla prima riga di M e agendo da dx cambia segno alla prima colonna, quindi deve essere

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & m_{ij} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

- Gli elementi diagonali m_{jj} devono essere $m_{jj} = 0, 1$ dal momento che corrispondono a $|\vec{O}_8|^2, |\vec{V}_8|^2, |\vec{C}_8|^2, |\vec{S}_8|^2$ e cioè corrispondono a "bosoni" a causa dei quadrati (bose-bose, fermi-fermi).

- i termini $m_{23}, m_{24}, m_{32}, m_{42}$ possono essere $0, -1$ perchè sono legati al prodotto di termini con statistica opposta
- i termini m_{34}, m_{43} prendono valori $0, +1$ (termini bose-bose)

Introducendo anche le condizioni poste da $SMS = M$, si può vedere che esistono quattro "ampiezze di vuoto" (ampiezze di toro) per stringhe chiuse invarianti modulari. Di queste due sono teo. supersimmetriche e due non supersimmetriche.

$$\tau_{IIB} = \frac{|V_8 - S_8|^2}{(\sqrt{\tau_2}\,\eta\bar{\eta})^8} \qquad [3.33] \qquad \underline{\text{Teo. Susy}}$$

$$\tau_{IIA} = \frac{(V_8 - S_8)(\bar{V}_8 - \bar{C}_8)}{(\sqrt{\tau_2}\,\eta\bar{\eta})^8} \qquad [3.34]$$

$$\tau_{0A} = \frac{(|O_8|^2 + |V_8|^2 + \bar{S}_8 C_8 + \bar{C}_8 S_8)}{(\sqrt{\tau_2}\,\eta\bar{\eta})^8} \qquad \underline{\text{Teo. non Susy}} \quad [3.35]$$

$$\tau_{0B} = \frac{(|O_8|^2 + |V_8|^2 + |S_8|^2 + |C_8|^2)}{(\sqrt{\tau_2}\,\eta\bar{\eta})^8} \qquad [3.36]$$

3.7 Spettro di Bassa Energia IIB

Per calcolare lo spettro a bassa energia, un'osservazione importante è che il denominatore delle ampiezze produce nello sviluppo solo "contributi" massivi. Infatti gli stati nell'espansione partono da $q^{-1/2}$, ma V_8 già contribuisce al numeratore con $q^{-1/2}$. Consideriamo solo il numeratore:

$$\tau_{IIB} : \qquad V_8\bar{V}_8 + S_8\bar{S}_8 - V_8\bar{S}_8 - S_8\bar{V}_8$$

$$V_8\bar{V}_8 \sim \lambda^i_{-1/2}\,\bar{\lambda}^j_{-1/2}\,|0\;0\rangle$$

questi stati sono un "bivettore" lo scomponiamo come al solito in parte simmetrica, parte antisimmetrica e traccia

$$g_{\mu\nu},\; B_{\mu\nu},\; \phi$$

$S_8 \bar{S}_8$ ~ questo termine sarà il prodotto di due spinori di stessa chiralità nella rappresentazione di $SO(8)$.

$$\underline{8}_s \otimes \underline{8}_s = \underline{1} \oplus \underline{28} \oplus \underline{35}$$

$$\underline{8}_s \otimes \underline{8}_c = \underline{8} \oplus \underline{56}$$

<u>Osservazione</u>: spin(8): decomposizione del prodotto di rappresentazioni

Dati due spinori si possono costruire oggetti tensoriali del tipo:

$$\lambda_\alpha \chi_{\dot\beta} (\gamma^\mu \gamma^\nu \dots \gamma^*)^{\alpha\dot\beta}$$

Quindi usando prodotti di γ^i 16 dimensionali dell'algebra di Dirac di spin(8) si costruiscono le rapp. tensoriali.

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^i_{a\dot a} \\ \gamma^i_{\dot b b} & 0 \end{pmatrix}$$

ad esempio

$$\gamma^i_{a\dot a} \gamma^j_{\dot a b} + \gamma^j_{a\dot a} \gamma^i_{\dot a b} = 2\delta^{ij} \delta_{ab}$$

quello che si vede facilmente è che se γ^i hanno un indice puntato e uno no, il prodotto di due γ ha due indici puntati o due indici non puntati, per prodotti di più γ questo si ripete modulo due.

Quindi per decomporre il prodotto di $\underline{8}_s \otimes \underline{8}_s$ si potrà utilizzare

$$\delta_{\alpha\beta}, \ \gamma^{ij}_{\alpha\beta}, \ \gamma^{ijkl}_{\alpha\beta}$$

Per il prodotto $\underline{8}_s \otimes \underline{8}_c$

$$\gamma^i_{\alpha\dot\beta}, \ \gamma^{ijk}_{\alpha\dot\beta}$$

Abbiamo quindi

$$S_8 \bar{S}_8 \sim \underline{1} \oplus \underline{28} \oplus \underline{35} \sim \varphi', B'_{\mu\nu}, A_{\mu\nu\rho\sigma}$$

φ' è un <u>assone</u>: scalare accoppiato derivativamente

$B'_{\mu\nu}$: tensore antisimmetrico

$A_{\mu\nu\rho\sigma}$: tensore antisimm. a quattro indici autoduale (<u>campo bosonico chirale</u>)

Osservazione: autodualità di $A_{\mu\nu\rho\sigma}$

(in 4 dim.)

$$\gamma^{\mu\nu\rho\sigma} \propto \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5$$

$$\gamma^{\mu\nu\rho} \propto \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma_\sigma$$

$$\gamma^{\mu\nu} \propto \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma_{\rho\sigma}$$

applicando queste matrici ad uno spinore autostato di γ_5 si vede che è equivalente (a meno di costanti) applicare $\gamma^{\mu\nu}$ o $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_{\rho\sigma}$. Questa è un condizione di autodualità.

Questo si vede anche dal fatto che $A_{\mu\nu\rho\sigma}$ corrisponde alla rapp. $\underline{35}$. Infatti per un tensore a 4 indici antisimm. si avrebbero

$$\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4!} = 70$$

parametri, ma l'autodualità li dimezza.

Usando la notazione delle forme (vedi paragrafi 3.8, 3.9) si può definire da $A_{\mu\nu\rho\sigma}$ una 5-forma

$$dA = H_5$$

con eq. della 5-forma

$$H_5 = \tilde{H}_5 \qquad [3.37]$$

si può vedere che questa eq. ha soluzioni non banali e implica le eq. di Maxwell

$$d\tilde{H}_3 = 0$$

inoltre l'eq. [3.37] dimezza le polarizzazioni e costituisce una proiezione chirale.

Vediamo gli altri termini dello spettro

$V_8 \bar{S}_8$
$S_8 \bar{V}_8$ $\sim \Psi_{i,\alpha}$ (spinor vettore)

$\Psi_{i,\alpha}$ può essere ridotto ad una γ-traccia più uno spinore di γ-traccia nulla:

$$\left| \begin{array}{ll} \Psi_{i,L} = \gamma_{i\alpha\dot{\beta}} \lambda^{\dot{\beta}} & \text{(gravitino sinistro, spin } 3/2\text{)} \\ \lambda^{\dot{\beta}} = (\gamma^i)^{\alpha\dot{\beta}} \Psi_{i,\alpha} & \text{gamma traccia} \\ \chi_{\alpha R} = \Psi_{i,\alpha_L} - c\,\gamma_{i\alpha\dot{\beta}} \lambda^{\dot{\beta}} & \text{(spinore destro)} \end{array} \right.$$

Complessivamente la teoria di stringa IIB ha uno spettro in cui compaiono

campi bosonici $\phi,\ B_{\mu\nu},\ g_{\mu\nu},\ B'_{\mu\nu},\ A_{\mu\nu\rho\sigma}$

campi fermionici $\chi_{R\alpha},\ \Psi_{i,L}$

3.8 p-brane e p-forme

Usando la teoria delle p-forme è possibile costruire generalizzazioni dell'elettromagnetismo a $D>4$

$$A_\mu : \quad 1\text{-forma}$$
$$B_{\mu\nu} : \quad 2\text{-forma} \quad (\text{antisimm in } \mu \text{ e } \nu)$$
$$\vdots$$
$$T_{\mu_1 \dots \mu_p} : \quad p\text{-forma} \quad (p \text{ indici antisimm.})$$

L'e.m (1-forma):

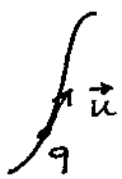
$$A_\mu$$
$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$
$$\begin{cases} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0 & (\text{id. di Bianchi}) \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu & (\text{eq. di Maxwell}) \end{cases}$$

Generalizziamo ad una (2-forma)

$$B_{\mu\nu}$$
$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}$$
$$\begin{cases} \partial_\mu H_{\nu\rho\sigma} - \partial_\nu H_{\rho\sigma\mu} + \partial_\rho H_{\sigma\mu\nu} - \partial_\sigma H_{\mu\nu\rho} = 0 & (\text{id. di Bianchi}) \\ \partial_\mu H^{\mu\nu\rho} = J^{\nu\rho} & (\text{eq. di Maxwell}) \end{cases}$$

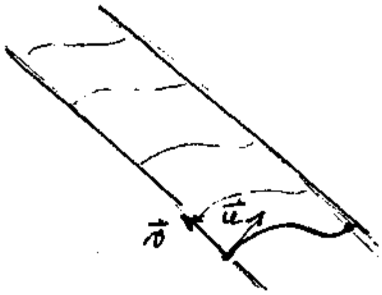
Quello che si è trovato è che la sorgente di $H^{\mu\nu\rho}$ ha due indici vettoriali.

In em. le sorgenti erano particelle cariche



$$J^\mu \sim q u^\mu$$

nella teoria costruita con le 2-forme la sorgente ha due indici, uno è da ricollegare alla velocità dell'oggetto, l'altro alla sua estensione spaziale (stringa)



chiaramente si possono fare generalizzazioni per sorgenti estese in più dimensioni: p-brane

$$\text{particelle} \longrightarrow A_\mu \quad (1\text{-forma})$$
$$\text{stringhe} \longrightarrow B_{\mu\nu} \quad (2\text{-forme})$$
$$p\text{-brane} \longrightarrow A_{\mu_1 \ldots \mu_{p+1}} \quad (p+1\text{-forma})$$

3.9 Notazione delle forme

consideriamo la forma differenziale

$$A = A_\mu dx^\mu$$

definiamo l'operatore

$$d = dx^\mu \partial_\mu$$

introduciamo inoltre la convenzione che il prodotto di forme è sempre antisimmetrico.

$$dA = dx^\mu \wedge dx^\nu \partial_\mu A_\nu$$
$$= \frac{1}{2} dx^\mu \wedge dx^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

Definiamo

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

definiamo duale di Hodge

$$*\, dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} dx_\rho \wedge dx_\sigma$$

quindi ad es. (<u>4. dim.</u>)

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$*F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} * (dx^\mu \wedge dx^\nu)$$

$$= \frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}\, dx_\rho \wedge dx_\sigma$$

$$= \frac{1}{2} \tilde{F}^{\rho\sigma} dx_\rho \wedge dx_\sigma$$

calcoliamo

$$d * F = \frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\alpha F_{\mu\nu} (dx^\alpha \wedge dx_\rho \wedge dx_\sigma)$$

$$* d * F = \frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\alpha F_{\mu\nu} * (dx_\alpha \wedge dx_\rho \wedge dx_\sigma)$$

$$*(dx_\alpha \wedge dx_\rho \wedge dx_\sigma) = \varepsilon_{\alpha\rho\sigma\tau} dx^\tau$$

per cui $\quad * d * F = \frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\rho\sigma\tau} \partial^\alpha F_{\mu\nu} dx^\tau =$

$$= \frac{1}{4} (-2)(\delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\tau - \delta^\mu_\tau \delta^\lambda_\nu) \partial^\alpha F_{\mu\nu} dx^\tau =$$

$$= -\partial^\mu F_{\mu\nu}\, dx^\nu = - J_\nu\, dx^\nu = - J$$

$$* d * F = - J$$

sapendo che in 4 dim.

$$(*)^2 = -1 \qquad \text{infatti} \quad \begin{cases} E \\ B \end{cases} \xrightarrow{\text{dualità}} \begin{cases} B \\ -E \end{cases} \xrightarrow{\text{dualità}} \begin{cases} -E \\ -B \end{cases}$$

si ha

$$d * F = - * J$$

cioè

$$F = dA$$

chiaramente per antisimmetria

$$d^2 = 0$$

e quindi $\quad dF = 0$

Questo si generalizza a tutte le p-forme, ad es.

$$B_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$H = dB$$

$$dH = 0$$

Osservazione: cariche magnetiche

e.m. (D=4)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J_e^\nu$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = J_m^\nu$$

dove $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ (tensore duale)

J_e^ν corrente elettrica

J_m^ν corrente magnetica

in generale dim. D

$$\tilde{F}^{\mu_1 \cdots \mu_{D-2}} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu_1 \cdots \mu_D} F_{\mu_{D-1}\mu_D}$$

$$\partial_{\mu_1} \tilde{F}^{\mu_1 \cdots \mu_{D-2}} = J^{\mu_2 \cdots \mu_{D-2}}$$

quindi la sorgente della J a D-3 indici è una (D-4)-brana.

Quindi in generale

$$A = A_{\mu_1 \cdots \mu_{p+1}}\, dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_{p+1}}$$

$$H_{p+2} = dA$$

$$dH_{p+2} = 0 \qquad \text{(id. Bianchi, se esistono solo sorgenti elettriche)}$$

generalizzando si hanno in presenza di cariche elettriche e magnetiche le eq:

$$\begin{cases} d * H = * J_e \\ dH = - * J_m \end{cases}$$

(1) H : $(p+2)$ forma

$*H$: $(D-p-2)$ forma

$d*H$: $(D-p-1)$ forma

$\Rightarrow$ $*J_e$: $(D-p-1)$ forma

J_e : $(p+1)$ forma $\qquad J_e = dx_{\mu_1} J^{\mu_1 \cdots \mu_{p+1}}$

$J_e^{\mu_1 \cdots \mu_{p+1}}$: $p+1$ forma

(2) H : $(p+2)$ forma

dH : $(p+1)$ forma

J_m : $(D-p-3)$ forma

20/4/2004

3.9 Spettri di bassa energia di stringa chiusa

(a) $$\boxed{\mathcal{T}_{IIB} = \frac{|V_8 - S_8|^2}{(\sqrt{\tau_2}\,\eta\bar{\eta})^8}}$$

[Vedi paragrafo 3.7]

$V_8\bar{V}_8 \sim T_{ij} \sim T_{\{ij\}} - T^i{}_i \,;\; T^i{}_i \,,\; T_{[ij]}$ (NS-NS)

$g_{\mu\nu} \,;\; \phi \,;\; B_{\mu\nu}$ (gravitone, dilatone, 2 forma)

$V_8\bar{S}_8 \sim \Psi_{i,L} \,;\; \lambda_R$ (gravitino sinistro, spinore destro) (NS-R)

$S_8 S_8 \sim \varphi',\, B'_{\mu\nu},\, A^+_{\mu\nu\rho\sigma}$ (assione, 2-forma, 4-forma autoduale) (R-R)

$S_8\bar{V}_8 \sim \Psi_{i,L} ,\lambda_R$ (gravitino sinistro, spinore destro) (R-NS)

<u>Osservazione</u> : Anomalie

Classicamente se una teoria ha una simmetria continua, allora per il teorema di Noether esisterà una corrente e una carica conservate lungo le eq. del moto.

Quantizzando una teoria classica può succedere che la misura dell'integrale funzionale non sia invariante sotto la simmetria dell'azione classica. In questo caso si dice che la teoria ha un'anomalia.

In questo caso la simmetria è rotta, la corrente non è più conservata, le particelle non si organizzano in multipletti degeneri della simmetria.

Se la simmetria rotta è una simmetria di gauge la teoria non è consistente. La simm. di gauge infatti è utile per eliminare le componenti non fisiche del campo di gauge.

La teoria IIB è anomaly-free, la presenza della 4 forma insieme ai fermioni chirali cancella le anomalie.

(b)

$$\boxed{\tau_{IIA} = \frac{|V_8 - S_8|^2}{(\sqrt{\tau_2}\,\eta\bar{\eta})^8}}$$

$$\tau_{IIA} = \underbrace{(g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi)}_{NS-NS} + \underbrace{(\psi_{\mu,L}, \psi_{\mu,R}, \lambda_R, \lambda_L)}_{NS-R,\ R-NS} + \underbrace{(A_\mu, A_{\mu\nu\rho})}_{R-R}$$

La teoria IIA non è una teoria chirale. La teoria è invariante sotto parità e quindi è trivially anomaly-free

(c)

$$\boxed{\tau_{0A} = \frac{(|O_8|^2 + |V_8|^2 + \bar{S}_8 C_8 + \bar{C}_8 S_8)}{(\sqrt{\tau_2}\,\eta\bar{\eta})^8}}$$

$$\tau_{0A} = \underbrace{(T, \phi, B_{\mu\nu}, g_{\mu\nu})}_{NS-NS} + \underbrace{(A_\mu, A'_\mu, C_{\mu\nu\rho}, C'_{\mu\nu\rho})}_{R-R}$$

C'è un tachione in questa teoria.

(d) $$\boxed{\tau_{0B} = \frac{(|O_8|^2 + |V_8|^2 + |S_8|^2 + |C_8|^2)}{(\sqrt{\tau_2}\,\eta\bar{\eta})^8}}$$

$$\tau_{0B} = (T, \phi, g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}) + (\varphi, \varphi', B'_{\mu\nu}, B''_{\mu\nu}, A^+_{\mu\nu\rho\sigma} + A^-_{\mu\nu\rho\sigma} = A_{\mu\nu\rho\sigma})$$

Anche in questa teoria c'è il tachione

<u>Osservazione</u>: in generale si può avere anomalie delle correnti gravitazionali solo in $d = 4n+2$

4. STRINGHE APERTE

4.1 La stringa bosonica

Consideriamo la funzione di partizione di stringa chiusa bosonica

$$Z = \int \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} \frac{1}{\tau_2^{12} (\eta \bar{\eta})^{24}}$$

Espandendo il denominatore si ha

$$\frac{1}{q\bar{q} \prod_n (1-q^n)^{24} (1-\bar{q}^n)^{24}} \sim \frac{1}{q\bar{q}} \left\{ 1 + (24)^2 q\bar{q} + \left(\frac{24 \cdot 25}{2} + 24\right)^2 (q\bar{q})^2 + \dots \right\}$$

$$\sim |0,\tilde{0}\rangle \oplus \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j |0,\tilde{0}\rangle \oplus (\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j \oplus \alpha_{-2}^k) \cdot$$

$$\cdot (\bar{\alpha}_{-1}^i \bar{\alpha}_{-1}^j \oplus \bar{\alpha}_{-2}^k) |0,\tilde{0}\rangle$$

$\sim$ (tachione) + (multipletto di gravità) + (stati massivi)

Come si vede c'è una simmetria sotto coniugazione $\eta \to \bar{\eta}$ che è essenzialmente una simmetria left-right ($L \leftrightarrow R$).

$q \sim$ left movers $\qquad \bar{q} \sim$ rights movers

Definiamo un operatore Ω che mappa i modi L in R (world-sheet parity)

$$\Omega^2 = 1 \longrightarrow \text{autovalori } \pm 1$$

Lo spazio di Hilbert degli stati può essere classificato in base agli autovalori di Ω: stati simmetrici e stati antisimmetrici sotto lo scambio $L \leftrightarrow R$.

Definiamo i proiettori

$$P = \frac{1 \pm \Omega}{2}$$

Solo gli stati simmetrici sotto Ω sono consistenti. Infatti la classificazione degli stati sotto Ω consiste nel definire un numero quantico moltiplicativo. Consideriamo un processo di scattering $1+2 \to 3$ con stati antisimmetrici sotto Ω.

Quindi questo n° quantico non è conservato, il caso invece con n° quantico (+) è conservativo. Solo la proiezione degli stati con + è consistente.

- il tachione $|0,\tilde{0}\rangle$ è simmetrico manifestamente
- $\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j |0,\tilde{0}\rangle \longrightarrow M^{ij}$

$$M^{ij} = \begin{cases} M^{(ij)} & \sim g_{\mu\nu}, \phi \qquad \oplus \\ + \\ M^{[ij]} & \sim \cancel{B_{\mu\nu}} \qquad \ominus \quad \text{stati scartati} \end{cases}$$

- modi massivi

$\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j \tilde{\alpha}_{-1}^k \tilde{\alpha}_{-1}^l |0,\tilde{0}\rangle \qquad M^{(ij)(kl)} = M^{(kl)(ij)}$

$\left.\begin{array}{l} \alpha_{-2}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j \tilde{\alpha}_{-1}^k |0,\tilde{0}\rangle \\ \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j \tilde{\alpha}_{-2}^k |0,\tilde{0}\rangle \end{array}\right\}$ la somma di questi due stati è uno stato simmetrico

$\alpha_{-2}^i \tilde{\alpha}_{-2}^j |0,\tilde{0}\rangle \qquad M^{(ij)}$

La funzione di partizione degli stati proiettati sarà

$$\mathrm{Tr}\left[q^{L_0}\bar{q}^{\bar{L}_0}\left(\frac{1+\Omega}{2}\right)\right]$$

$$\mathrm{Tr}\left[q^{L_0}\bar{q}^{L_0}\left(\frac{1+\Omega}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(q^{L_0}\bar{q}^{\bar{L}_0}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\Omega q^{L_0}q^{\bar{L}_0}\right)$$

Indichiamo uno stato generico come

$$|L,R> = \prod_i \alpha^i \prod_j \alpha^j |0,\tilde{0}>$$

$$\Omega|L,R> = |R,L>$$

ad esempio:

$$\Omega(\alpha_{-1}^i\alpha_{-1}^j\tilde{\alpha}_{-2}^k)|0,\tilde{0}> = \alpha_{-2}^k\tilde{\alpha}_{-1}^i\tilde{\alpha}_{-1}^j|0,\tilde{0}>$$

$$\mathrm{Tr}\left(\Omega q^{L_0}\bar{q}^{\bar{L}_0}\right) = \sum_{L,R}<L,R|q^{L_0}\bar{q}^{\bar{L}_0}\Omega|L,R> =$$

$$= \sum_{L,R} q^{N_L}\bar{q}^{N_R}<L,R|R,L> = \sum_{L,R} q^{N_L}\bar{q}^{N_R}|<L|R>|^2 =$$

$$= \sum_L <L|(q\bar{q})^{N_L}|L> = \frac{1}{\eta^{24}(2i\tau_2)}$$

~ la somma è collassata nella somma di un solo settore che indichiamo con L per fissare le idee.

$$q = e^{2\pi i\tau} \qquad q\bar{q} = e^{-4\pi\tau_2} = e^{2\pi i(2i\tau_2)}$$

$$\mathrm{Tr}\, q^{L_0} = \frac{1}{\eta^{24}(q)}$$

Quindi si ha la seguente funzione di partizione

$$Z = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{\tau_2^2} \frac{1}{\tau_2^{12}(\eta\bar{\eta})^{24}} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\tau_2}{\tau_2^2} \cdot \frac{1}{\eta^{24}(2i\tau_2) \cdot \tau_2^{12}}$$

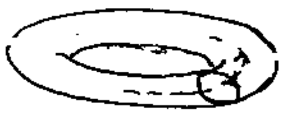
$$= \frac{1}{2} T + \frac{1}{2} K$$

Questo integrale ha perso l'invarianza unimodulare. Dal punto di vista geometrico non si sta più facendo un integrazione su di un toro ma su superfici con caratteristica di Eulero nulla:

$$\chi = \int R$$

$$\chi = 0$$

- consideriamo una stringa chiusa che gira e calcoliamo il suo ~~diagramma di vuoto~~

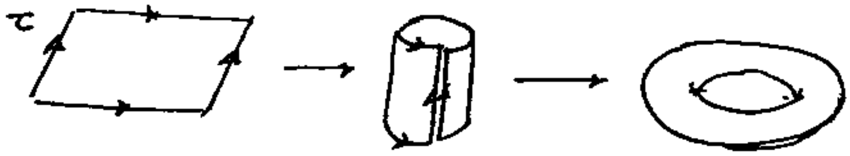


la stringa si propaga e ritorna in se stessa al punto di partenza

inserendo il proiettore, per un fissato t, si ha:

Mentre la propagazione di una stringa chiusa portava a definire un toro:

> lati orizzontali sono id.: la stringa torna in se stesso dopo essersi propagata
> lati verticali identificati: stringa chiusa

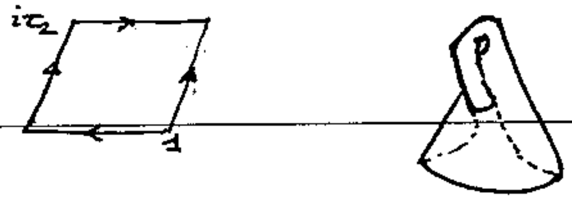


Adesso un pezzo della funzione di partizione rappresenta l'integrazione su superfici non orientabili con caratteristica di Eulero nulla..

Una sup. non orientabile è tale che dopo un giro completo il versore normale alla superficie cambia di verso.

La bottiglia di Klein e la striscia di Moebius sono esempi di superfici non orientabili.

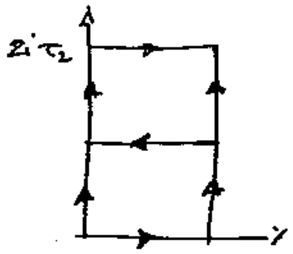
La <u>bottiglia di Klein</u> è definita come



In questa rappresentazione τ_2 rappresenta il "tempo proprio" impiegato dalla stringa chiusa per spazzare la bottiglia di Klein.

Esiste una seconda scelta per il poligono fondamentale, che definisce una seconda scelta per il tempo proprio.

Raddoppiando verticalmente la bottiglia di Klein si ottiene un toro. Il toro infatti è il ricoprimento doppio della b.K, della striscia di Moebius ed anche dell'anello.



si è ottenuto un toro di modulo $\tau = 2i\tau_2$

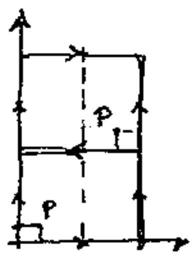
consideriamo K nella funzione di partizione Z e facciamo un cambio di variabile $t = 2\tau_2$

$$K = \int_0^{\infty} \frac{d\tau_2}{\tau_2^2} \frac{1}{\tau_2^{12}\eta^{24}(2i\tau_2)} = 2^{13} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{14}} \frac{1}{\eta^{24}(it)}$$

facciamo una trasformazione modulare $1/t = l$

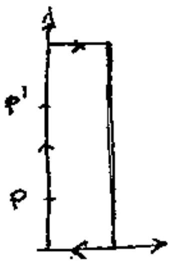
$$\tilde{K} = 2^{13} \int_0^{\infty} dl \, \frac{l^{12}}{\eta^{24}(i/l)} = 2^{13} \int_0^{\infty} dl \, \frac{1}{\eta^{24}(il)}$$

$$\eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau}\,\eta(\tau) \qquad \tau = il \qquad \eta(i/l) = l^{1/2}\eta(il)$$



Ogni punto della K.b. ha un'immagine nella 2ª cella per definizione, dal momento che la 2ª è data da una riflessione più una traslazione della prima cella.

$$P: x + iy \longrightarrow P' = -x + iy + i\tau_2 + 1$$



Dimezzando i lati orizzontali in modo da ottenere l'area della Kb di partenza si ottiene una rapp. equivalente

Quello che si ottiene è un tubo che termina su 2 <u>crosscaps</u> ($S^2/\mathbb{Z}_2$).

In questo caso il tempo orizzontale rappresenta il tempo proprio impiegato dalla stringa chiusa per propagarsi tra i due crosscaps.

Quello che si è fatto nel passare da una rappresentazione all'altra equivale ad un passaggio da diagrammi a loop a diagrammi ad albero

Consideriamo ora le possibili divergenze di K

$$K = \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau_2^2} \frac{1}{\tau_2^{12}\eta^{24}(2i\tau_2)}$$

$$\tilde{K} = 2^{13} \int_0^\infty dl \, \frac{1}{\eta^{24}(il)}$$

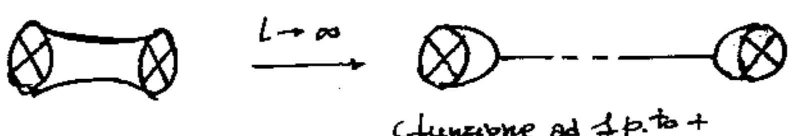
Ci possono essere potenzialmente divergenze per $\tau_2 \to 0$ ($l \to \infty$) e per ($\tau_2 \to \infty$), ($l \to 0$). Si può dim. che $\tau_2 \to \infty$ è protetto dalle potenze di τ_2 al denominatore. Consideriamo $\tau_2 \to 0$.

$$\eta(il) = e^{-\pi l/12} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-2\pi k l})$$

$$\int_0^\infty dl \, e^{2\pi l} \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}(1-e^{-2\pi k l})^{24}} = \int_0^\infty dl \left\{ e^{2\pi l} + 24 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-2\pi n l} \right\}$$

l rappresenta la lunghezza del tubo in cui si propaga la stringa, è un <u>parametro di Schwinger</u>.

- $\int_0^\infty dl\, e^{-m^2 l} = \frac{1}{m^2} = \frac{1}{p^2+m^2}\Big|_{p^2=0}$ propagatore



$\int_0^\infty dl\, e^{2\pi l} = -\frac{1}{2\pi}$

(funzione ad 1 p.to + propagatore)

- si ho poi un termine

$$24 \cdot \frac{2^{13}}{2} \int_0^\infty dl \sim \frac{1}{m^2}\Big|_{m^2=0}$$

lo spettro di massa di stringa chiusa è

$$M^2 = \frac{4}{\alpha'}(N-1)$$

La divergenza dovuta al tachione può essere regolarizzata, al contrario non c'è modo di regolare le divergenze dovute agli stati di massa nulla.

Poniamo i giusti coefficienti

$$\frac{8\pi}{\alpha'}\int_0^\infty dl\, e^{2\pi l} = -\frac{4}{\alpha'}$$

$$\frac{2^{13}}{2}\cdot 24 \int_0^\infty dl = \frac{2^{13}}{2}\cdot 24\, \frac{\alpha'}{8\pi}\, \frac{1}{m^2}$$

one-point function $= \left(\frac{\alpha'}{8\pi}\cdot 2^{13}\cdot 24\right)^{1/2}$

4.2 Discendenti aperti

Si vuole formulare perturbativamente un modello di stringa aperta. Si otterrà una teoria con uno spettro contenente sia settori aperti che chiusi.

Si definirà quindi un'espansione perturbativa su superfici di Reimann con bordi e non orientabili, cioè su superfici caratterizzate da un numero variabile di bordi e crosscaps.

La caratteristica di Eulero per tali superfici con h manici, b bordi, c crosscaps è

$$\chi = 2-2h-b-c$$

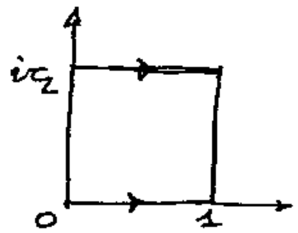
$\chi = 2$ sfera

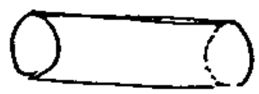
$\chi = 0$ toro, nastro di Moebius, bottiglia di Klein, anello

$\chi = 1$ disco, crosscap

L'espansione sarà una serie in potenze di $g_s^{-\chi}$

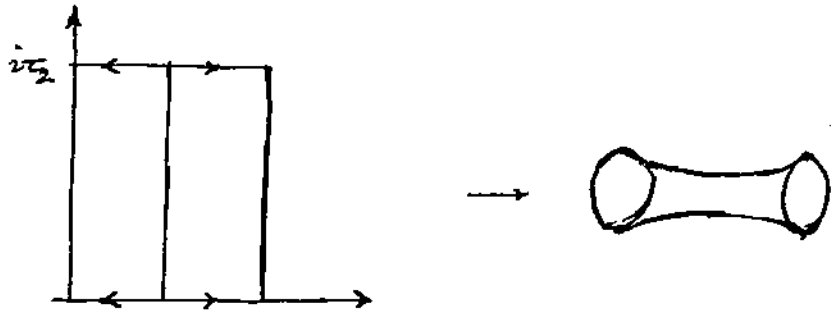
- Consideriamo un anello





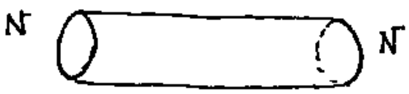
τ_2 in questa rapp. è il tempo impiegato da una stringa aperta a spazzare l'anello (diagramma ad 1 loop)

Raddoppiamo orizzontalmente la cella dell'anello e dimezziamola verticalmente.



Il tempo orizzontale definisce il tempo impiegato da una stringa chiusa nel propagarsi fra due bordi.

Le stringhe aperte hanno estremi, è possibile assumere che essi presentino, oltre ai campi che si propagano nello spazio di Minkowski, degli ulteriori gradi di libertà non dinamici, associati ai loro estremi. Questi possono essere associati alle cariche di un gruppo di simmetria interna: cariche di Chan-Paton.



L'ampiezza ad un loop, definita in termini di traccia su stati di stringa aperta è data da

$$\mathcal{A} = \frac{N^2}{2} \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{\tau_2^{14}} \, \mathrm{tr}\left(q^{\frac{1}{2}(N-1)}\right)$$

L'esponente è dato dalla condizione di mass-shell di stringa aperta

$$m^2 = \frac{1}{\alpha'}(N-1)$$

Il prefattore N^2 considera la molteplicità associata agli estremi di stringa che tiene conto della simm. interna di Chan-Paton.

Invece di procedere direttamente si può considerare il toro che costituisce il ricoprimento doppio dell'anello

$$\tau' = \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{\tau_2^{14}} \frac{1}{\eta^{24}(i\tau_2/2)}$$

Quindi si deve avere

$$\frac{1}{2}(\#)^2 \int_0^\infty dl \, \frac{1}{\eta^{24}(il)} = (l = 1/t) = \frac{1}{2}(\#)^2 \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} \frac{1}{t^{12}\eta^{24}(it)} =$$

$$= \frac{1}{2}(\#)^2 \, 2^{13} \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{\tau_2^2} \frac{1}{\tau_2^{12}\eta^{24}(i\tau_2/2)}$$

quindi

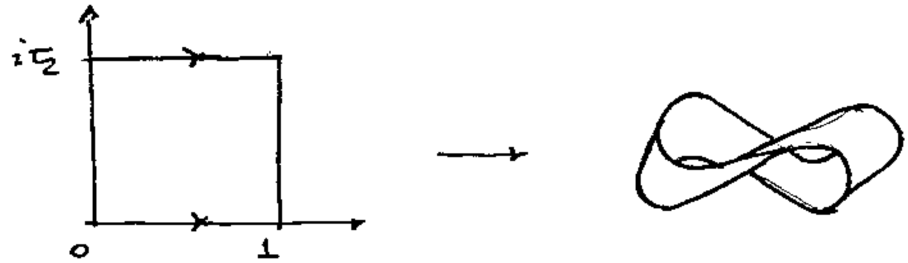
$$\frac{N^2}{2} \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{\tau_2^2} \frac{1}{\tau_2^{12}\eta^{24}(i\tau_2/2)} = \frac{1}{2}(\#)^2 \, 2^{13} \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{\tau_2^2} \frac{1}{\eta^{24}(i\tau_2/2)}$$

$$(\#)^2 = N^2 \, 2^{-13}$$

$$A = N^2 \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{\tau_2^2} \frac{1}{\tau_2^{12}\eta^{24}(i\tau_2/2)}$$

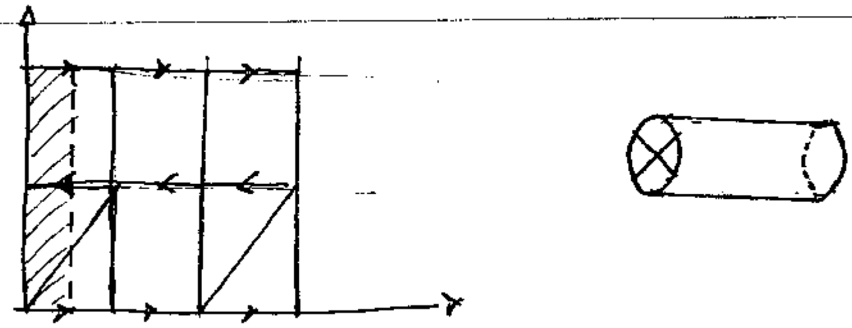
$$\tilde{A} = N^2 2^{-13} \int_0^\infty dl \, \frac{1}{\eta^{24}(il)}$$

- studiamo il nastro di Möbius



τ_2 descrive il tempo proprio impiegato dalla stringa aperta per spazzare la striscia di Moebius. Si può ancora scegliere un differente poligono fondamentale.

Questo si ottiene raddoppiando in verticale e dimezzando in orizzontale, il tempo orizzontale definisce, in questo modo, la propagazione di una stringa chiusa fra un bordo e un crosscap



In questo caso il raddoppiamento verticale non definisce un toro doppiamente ricoprente. Questo però esiste ed ha un modulo dato da

$$\tau = \frac{1}{2} + \frac{i\tau_2}{2}$$

Cioè da una cella obliqua con vertici $0, 2$ e $i\tau_2 + 1$

Calcoliamo l'ampiezza di Möbius (dal toro)

$$\mathcal{M} = N\int_0^\infty \frac{d\tau_2}{\tau_2^2}\frac{1}{\tau_2^{12}\,\eta^{24}\left(\frac{i\tau_2}{2}+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\eta(\tau) = e^{i\pi\tau/12}\prod_{k=1}^{\infty}(1-e^{+2\pi i k})$$

$$\eta\left(\frac{1}{2}+\frac{i\tau_2}{2}\right) = e^{i\pi/24}\,e^{-\pi\tau_2/24}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-(-)^n e^{-\pi n\tau_2}\right)$$

- Le ampiezze A e M determinano lo spettro aperto proiettato (non orientato). Controlliamo gli stati contenuti nelle due funzioni di partizione.

$$\chi(q) = q^{n-c/24}\sum_{n=0}^{\infty} d_n q^n$$

$$\sqrt{q}\to e^{i\pi}\sqrt{q} \Longrightarrow A\to M$$

$$\chi(e^{i\pi}\sqrt{q}) = e^{i\pi(n-c)/24}(\sqrt{q})^{n-c/24}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n d_n(\sqrt{q})^n$$

$$\tilde{\chi}(q) = e^{-i\pi(n-c)/24}\chi(e^{i\pi}\sqrt{q})$$

$\tilde{\chi}$ è manifestamente reale

si ha (trascurando l'integrazione)

$$\frac{N}{\sqrt{q}\prod_{k=1}^{\infty}(1-(-)^k e^{-\pi k\tau_2})^{24}} = \frac{1}{\sqrt{q}}\frac{N}{(1+\sqrt{q})^{24}(1-q)^{24}(1+q^{3/2})^{24}\cdots} =$$

$$= \frac{N}{\sqrt{q}}\left\{1-24\sqrt{q}+\cdots\right\}$$

$$= \text{tachione} + \text{vettore} + \cdots$$

$$\mathcal{A} \longrightarrow \frac{N^2}{2}\left((\sqrt{q})^{-1} + (24) + \dots\right)$$

$$\mathcal{M} \longrightarrow \frac{N}{2}\left((\sqrt{q})^{-1} - (24) + \dots\right)$$

Cioè, si ha

$$\frac{1}{2}\mathcal{A} + \frac{1}{2}\mathcal{M} \longrightarrow \underbrace{\frac{N(N+1)}{2}}_{\text{tachioni}} \cdot q^{-1/2} + \underbrace{\frac{N(N-1)}{2}}_{\text{vettori e massa nulla}} + \dots$$

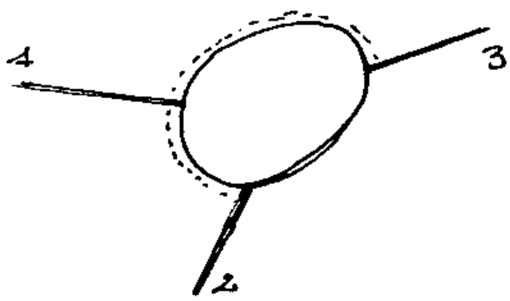
Quindi si è ottenuto il conteggio degli stati del settore "twisted".

- Uno degli aspetti fondamentali delle ampiezze di stringa aperta è la loro simmetria ciclica. E' possibile generalizzare questa importante proprietà usando tracce di matrici Λ^a del gruppo di simmetria di Chan-Paton. Infatti la traccia è naturalmente ciclica negli argomenti.

Si definiscono ampiezze "dressed" a n punti del tipo

$$A(1,\dots,n)\,\mathrm{tr}(\Lambda^{a_1}\dots\Lambda^{a_n})$$

dove $A(1,\dots,n)$ è l'ampiezza di stringa "bare" ottenuta con le usuali regole per le stringhe aperte.

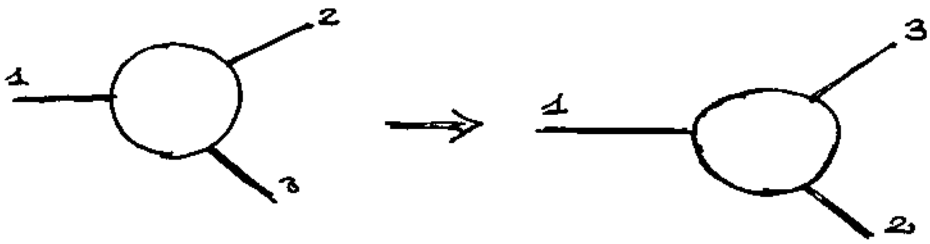


$$A(1,2,3)\,Tr(\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3)$$

Coppie di ampiezze $A(1,\dots,n)$ di stringhe bosoniche collegate da Word-sheet parity sono proporzionali:

$$A(1,\dots,n) = (-1)^{\sum_i(\alpha' M_i^2+1)} A(n,\dots,1)$$

Il segno viene dall'azione di Ω sugli oscillatori che trasformano come $\alpha_k \to (-1)^k \alpha_k$.



$$A_T(1,2,3) = A(1,2,3)\,Tr(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3) + A(1,3,2)\,Tr(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3)$$

$$A(1,3,2) = A(3,2,1) = -A(1,2,2)$$

$$A_T(1,2,3) = A(1,2,3)\,Tr[\Lambda_1[\Lambda_2,\Lambda_3]] =$$
$$= f_{23k}\,A(1,2,3)\,Tr(\Lambda_1\Lambda_k) =$$
$$= f_{231}\,A(1,2,3)$$

accoppiamento teoria di Young-Mills

Per le simmetrie di Chan-Paton i gruppi di gauge permessi sono: $U(N)$, $O(N)$, $USp(2N)$. [Marcus-Sagnotti]

- Per fissare la dimensione del gruppo si deve studiare il comportamento della teoria nel limite $\tau_2 \to 0$ $(l \to \infty)$ in cui come visto compaiono divergenze.
  In questo modo si può porre la dim. del gruppo in modo da cancellare le divergenze della teoria.

- Definiamo l'ampiezza $\tilde{\mathcal{M}}$ di Möbius.

  Consideriamo una trasformazione P (Pradisi)

  $P = TST^2S$ $\qquad\qquad$ $\hat{P} = T^{1/2}ST^2ST^{1/2}$ (per i caratteri)

$$P\left(\frac{1}{2}+\frac{i\tau_2}{2}\right) = TST^2\left(-\frac{2}{1+i\tau_2}\right) = TS\left(-\frac{2}{i\tau_2+1}+2\right) =$$

$$= T\left(-\frac{i\tau_2+1}{2i\tau_2}\right) = \frac{1}{2}+\frac{i}{2\tau_2}$$

$$\int_0^\infty \frac{dl}{l^2}\cdot e^{2}\cdot\frac{e^{12}}{\hat{\eta}^{24}\left(\frac{il}{2}+\frac{1}{2}\right)} = 2N\int_0^\infty dl\,\frac{1}{\hat{\eta}^{24}(il+1/2)}$$

- <u>tadpole condition</u>

  Consideriamo la combinazione delle ampiezze

$$\tilde{\mathcal{M}}+\tilde{\mathcal{A}}+\tilde{\mathcal{K}} \sim (2^{13}+2^{-13}N^2-2N) = 2^{13}(N-2^{13})^2$$

Quindi per $N = 2^{13}$ si ha cancellazione delle divergenze

$$SO(2^{13}) = SO(8192)$$

4.3 Discendenti aperti a 10 dimensioni (teo. susy)

- consideriamo la teoria IIB (supersimmetrica, e simmetrica sotto Ω, a differenza della IIA). Come già fatto iniziamo mescolando modi sinistri e destri.

$$\tau_{IIB} \sim |V_8 - S_8|^2$$

$$K = \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{\tau_2^2} \frac{(V_8 - S_8)(2i\tau_2)}{\tau_2^4 \, \eta^8(2i\tau_2)}$$

$$\tau \longrightarrow \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}K$$

---

quindi:

$V_8 \bar{V}_8 \longrightarrow$ " $\frac{V_8 \bar{V}_8 + V_8}{2}$ " $\qquad \frac{n^2+n}{2}$ stati (simm.)

$S_8 \bar{S}_8 \longrightarrow$ " $\frac{S_8 \bar{S}_8 - S_8}{2}$ " $\qquad \frac{n^2-n}{2}$ stati antisimm.

$V_8 \bar{V}_8$: $g_{\mu\nu}$, $\cancel{B_{\mu\nu}}$, φ

$S_8 \bar{S}_8$: $\cancel{\phi}$, $B_{\mu\nu}$, $\cancel{A_{\mu\nu\rho\sigma}}$

- consideriamo il settore aperto

$$\mathcal{A} = N^2 \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{\tau_2^2} \frac{(V_8 - S_8)(i\tau_2/2)}{\tau_2^4\, \eta^8(i\tau_2/2)}$$

$$\mathcal{M} = \pm N \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{\tau_2^2} \frac{(\hat{V}_8 - \hat{S}_8)(i\tau_2/2 + 1/2)}{\tau_2^4\, \hat{\eta}^8(i\tau_2/2 + 1/2)}$$

- $$\tilde{\mathcal{K}} = 2^5 \int_0^\infty dl\, \frac{(V_8 - S_8)(il)}{\eta^8(il)}$$

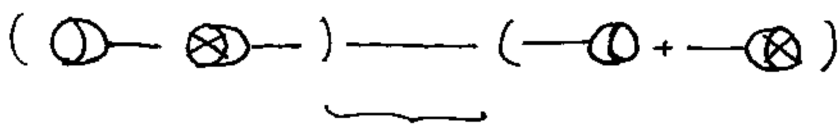
$$\tilde{\mathcal{A}} = 2^{-5} N^2 \int_0^\infty dl\, \frac{(V_8 - S_8)(il)}{\eta^8(il)}$$

$$\tilde{\mathcal{M}} = \pm 2N \int_0^\infty dl\, \frac{(\hat{V}_8 - \hat{S}_8)(il)}{\hat{\eta}^8(il)}$$

- ~~condizioni di tadpole (sia NS-NS che R-R)~~

$$2^5 + 2^{-5} N^2 \pm 2N = 2^{-5}(N \pm 2^5) = 0$$

$$N = 32 \qquad SO(32)$$



propagatore
NS-NS o R-R

annullamento coupling R-R

$$q_B + q_0 = 0$$

q_B : carica brana

q_0 : carica orientifold

5. COMPATTIFICAZIONE TOROIDALE

La teoria delle stringhe nella sua formulazione richiede delle dimensioni extra. Per farne una teoria realistica occorre introdurre compattificazioni dimensionali.

5.1 Compattificazioni toroidali

c'è un modo semplice di introdurre dimensioni extra proposto negli anni '20 da Kaluza che consiste nel considerare dimensioni aggiuntive allo spazio-tempo 4-dim che rimangono piccole.

Le particelle hanno funzioni d'onda che devono essere periodiche nelle dim. extra.

$$e^{ipx} = e^{ip(x+2\pi R)}$$

dove R è il raggio dell'extradimensione

$$2\pi R\, p = 2\pi n$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{n}{R}$$

$$E_n \sim \frac{n^2}{R^2} \qquad [5.1]$$

Quindi per R molto piccolo occorrono energie molto alte per eccitare il primo modo nelle extra-dim.

Nel caso di stringhe chiuse, per definire lo stato occorre introdurre un nuovo numero quantico che indichi il numero di avvolgimenti della stringa sull'extra dimensione (Winding).

Nell'espansione in modi della stringa chiusa si può aggiungere un termine non periodico, lineare in σ, che risolve le eq. del moto, che indica il numero di avvolgimenti attorno alla extradimensione.

$$X = x + 2\alpha' p \tau + 2nR\sigma + \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\left(\frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{i2n(\tau-\sigma)} + \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{n} e^{-i2n(\tau+\sigma)}\right) \qquad [5.2]$$

sostituiamo nei termini lineari

$$\tau = \frac{1}{2}(\tau+\sigma) + \frac{1}{2}(\tau-\sigma)$$

$$\sigma = \frac{1}{2}(\tau+\sigma) - \frac{1}{2}(\tau-\sigma)$$

in questo modo si possono separare completamente i modi sinistri e destri.

$$X = x + (\tau+\sigma)\left[\alpha'\frac{m}{R} + nR\right] + (\tau-\sigma)\left[\alpha'\frac{m}{R} - nR\right] + \sum(\dots)$$

definiamo impulsi destro e sinistro

$$p_L := \frac{1}{2}\left(\frac{m}{R} + \frac{nR}{\alpha'}\right)$$
$$p_R := \frac{1}{2}\left(\frac{m}{R} - \frac{nR}{\alpha'}\right) \qquad [5.3]$$

per $n \neq 0$ i due impulsi sono differenti:

$$X = x + (2\alpha')\, p_L (\tau+\sigma) + (2\alpha')\, p_R(\tau-\sigma) + (\text{oscillazioni})$$

Le masse degli stati di stringa vengono dalle relazioni (p. 36)

$$M^2 = 2p^+p^- - (p^i)^2$$
$$= \frac{4}{\alpha'}(N-1) = \frac{4}{\alpha'}(\tilde{N}-1) \qquad [5.4]$$

con il vincolo:

$$N = \tilde{N} \qquad \text{level matching.}$$

Possiamo ora reinterpretare lo spettro, interpretando uno dei impulsi come un impulso interno che quindi non contribuisce alla relazione di mass-shell.

Si era definito

$$\tilde{\alpha}_0^i = \alpha_0^i = \frac{1}{2}\sqrt{2\alpha'}\, p^i$$

occorre ridefinire questa relazione rispetto a p_L e p_R che possono essere differenti.

Portando al secondo membro della [5.4] gli impulsi p_L^2 e p_R^2 della dim. extra

$$M^2 = \left(\frac{m}{R} + \frac{nR}{\alpha'} \right)^2 + \frac{4}{\alpha'} (N-1) \qquad [5.5]$$

$$= \left(\frac{m}{R} - \frac{nR}{\alpha'} \right)^2 + \frac{4}{\alpha'} (\tilde{N}-1) \qquad [5.6]$$

Facciamo semisomma e semidifferenza

$$M^2 = \frac{m^2}{R^2} + \frac{n^2R^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} - 2) \qquad [5.7]$$

$$mn + (N - \tilde{N}) = 0 \qquad [5.8]$$

5.2 T-dualità

Dalla formula di massa [5.7] si vede che per $R \to \infty$ il termine di avvolgimento diventa infinitamente massivo mentre lo spettro del momento compatto diventa continuo, come ci si aspetta da una dim. non compatta.

Nel limite $R \to 0$ gli stati di momento compatti-ficato diventano infinitamente massivi e lo spettro degli stati di avvolgimento diventa continuo, dal momento che non costa molto in energia avvolgere una stringa intorno ad un cerchio piccolo.

Anche nel limite $R \to 0$ lo spettro sembra tornare ad una dimensione decompattificata. I limiti $R \to 0$ e $R \to \infty$ sono fisicamente identici.

Lo spettro [57] è invariante sotto

$$R \to R' = \frac{\alpha'}{R}$$
$$n \longleftrightarrow m \qquad [5.9]$$

C'è quindi un valore di R

$$R = \sqrt{\alpha'}$$

al di sotto del quale la fisica "si ripete".

Questa simmetria si chiama T-dualità.

Confrontiamo la teo. di ordinaria di stringa bosonica con la teoria compattificata

In $D+1$ dim. gli stati più bassi in massa sono

$$m^2 = -\frac{4}{\alpha'} \qquad T$$

$$m = 0 \qquad g_{MN}, B_{MN}, \varphi$$

$(D+1)$ dim		D dim
T	$\longrightarrow$	serie di Fourier di Tachioni
g_{MN}	$\longrightarrow$	$g_{\mu\nu}, g_{\mu D} = A_\mu, g_{DD} = \phi$

$(D+1)$ dim $\qquad\qquad\qquad$ D dim

$$B_{MN} \longrightarrow B_{\mu\nu},\, B_\mu,\, \phi'$$

$$\varphi \longrightarrow \text{serie di Fourier di dilatoni}$$

Passando da $(D+1)$ dim a D dimensioni la teoria acquista due campi di gauge abeliani A_μ, B_μ. Il gruppo di gauge acquistato è $U(1) \times U(1)$.

Quello che succede a $R = \sqrt{\alpha'}$ è che questa simmetria di gauge si innalza a $SU(2) \times SU(2)$. In generale dopo la compatt. di D dimensioni invece di avere gruppi di gauge di dimensione D si hanno gruppi di rango D (# generatori diagonalizzabili simultaneamente).

Per vedere come questo succede occorre studiare le eccitazioni del tachione.

$$\alpha_{-1}^{I} = (\alpha_{-1}^{i}, \alpha_{-1})$$

$$T: \quad |0, \vec{0}\rangle$$

$$\alpha_{-1}^{I}\alpha_{-1}^{J}|0,\vec{0}\rangle \longrightarrow \alpha_{-1}^{i}\tilde{\alpha}_{-1}^{j}|0,\vec{0}\rangle$$
$$\alpha_{-1}\tilde{\alpha}_{-1}^{j}|0,\vec{0}\rangle,\ \alpha_{-1}^{i}\tilde{\alpha}_{-1}|0,\vec{0}\rangle$$
$$\alpha_{-1}\tilde{\alpha}_{-1}|0,\vec{0}\rangle$$

Gli stati ottenuti sono tutti a massa nulla e soddisfano il level matching.

Esistono altre soluzioni del level matching [5.8]

$$m = n = \pm 1$$

$$N = 0 \;,\; \tilde{N} = 1$$

$$\tilde{\alpha}^i_{-1} \,|\, p_L , p_R >$$

$|p_L, p_R>$ è un vuoto dal punto di vista degli oscillatori ma è eccitato dal numero di winding.

$$m = -n = \pm 1$$

$$N = 1 \;,\; \tilde{N} = 0$$

$$\alpha^i_{-1} \,|\, p_L , p_R >$$

Questi quattro stati hanno tutti le stesse masse

$$M^2 = \frac{1}{R^2} + \frac{R^2}{\alpha'^2} - \frac{2}{\alpha'} = \left(\frac{1}{R} - \frac{R}{\alpha'} \right)^2$$

le masse si annullano per $R = \sqrt{\alpha'}$, compaiono quindi 4 vettori a massa nulla che si aggiungono ai 2

$$\alpha_{-1} \, \tilde{\alpha}^j_{-1} |0, \vec{0}>$$

$$\alpha^i_{-1} \, \tilde{\alpha}_{-1} \, |0, \vec{0}>$$

si formano in questo modo 1 tripletto destro e 1 tripletto sinistro. Per provare che il gruppo di simmetria che si ottiene non è $U(1)^3$ ma $SU(2)$ si possono calcolare le ampiezze di scattering.

Quindi per $R = \sqrt{\alpha'}$ la simmetria $U(1) \times U(1)$ si è innalzata a $SU(2) \times SU(2)$. (enhancement)

Vediamo come agisce la T-dualità sugli impulsi [5.9]

$$p_L' = \frac{1}{2}\left(\frac{nR}{\alpha'} + \frac{m}{R}\right)$$

$$p_R' = \frac{1}{2}\left(\frac{nR}{\alpha'} - \frac{m}{R}\right) \qquad [5.10]$$

quindi:

$$p_L \longrightarrow p_L$$

$$p_R \longrightarrow -p_R$$

la T-dualità è una trasformazione di parità sui modi destri.

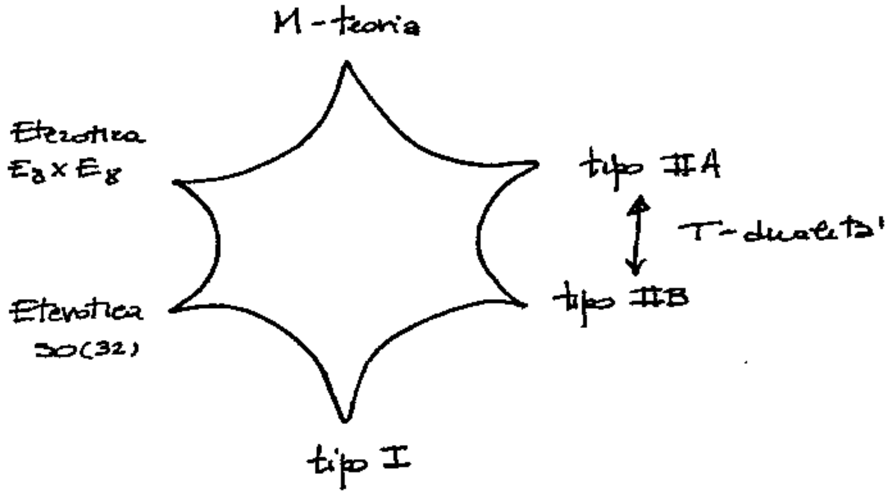
Le teorie IIA e IIB di superstringa avevano funzioni di partizione

$$\tau_{IIA} \sim (V-S)(\bar{V}-\bar{C})$$

$$\tau_{IIB} \sim (V-S)(\bar{V}-\bar{S})$$

Di conseguenza la T-dualità scambia la teoria IIA con la IIB

Quello che si è dimostrato è la prima delle relazioni che collegano differenti teorie di stringa nel diagramma di dualità



5.3 Funzioni di Partizioni

La funzione di partizione di stringa bosonica diventa:

$$\frac{1}{\tau_2^{12}(\eta\bar{\eta})^{24}} \longrightarrow \frac{1}{\tau_2^{12}(\eta\bar{\eta})^{24}} \sqrt{\frac{\alpha'\tau_2}{R^2}} \sum_{m,n} q^{\frac{\alpha'}{4}p_L^2} \bar{q}^{\frac{\alpha'}{4}p_R^2} \quad [5.11]$$

Questa funzione di partizione è ancora invariante modulare (non dim.)

Vediamo come si comporta per $R \to \infty$ il fattore correttivo

$$\sum_{(m,n)} q^{\frac{\alpha'}{4}\left(\frac{m}{R}+\frac{nR}{\alpha'}\right)} \bar{q}^{\frac{\alpha'}{4}\left(\frac{m}{R}-\frac{nR}{\alpha'}\right)}$$

Per $R \to 0$ sopravvive solo $n=0$ dal momento che $|q|<1$

$$\xrightarrow{R\to\infty} \sum_m{}' (q\bar{q})^{\frac{\alpha'}{4}\frac{m^2}{R^2}}$$

Per m grande $\sum_m{}' \to \int dm$

$$\int dm\, e^{-\alpha'\pi\tau_2 \frac{m^2}{R^2}} = \frac{R}{\sqrt{\alpha'\tau_2}}$$

Quindi il prefattore per $R\to\infty$ tende correttamente a 1, cioè alla funzione di partizione non compattificata.

Vogliamo capire adesso come si generalizza questa costruzione a compattificazioni su un toro generico (si è studiata fin qui la compattificazione su un cerchio: toro 2-dim.).

Ci aspettiamo

$$\begin{bmatrix}\text{f. di partizione}\\ \text{compattif.}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{f. di partizione}\\ \text{in spazio non compatt.}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\text{fattore di}\\ \text{correzione}\end{bmatrix}$$

Il volume del toro d-dim.

$$V \sim R^d$$

$$\begin{bmatrix}\text{fattore di}\\ \text{correzione}\end{bmatrix} = \left(\frac{\sqrt{\alpha'\tau_2}}{V}\right)^d \sum_{\vec{m},\vec{n}} q^{\alpha' p_L^2}\, \bar{q}^{\alpha' p_R^2} \qquad [5.12]$$

$\vec{m},\vec{n}$: vettori d-dimensionali

Osservazione: in letteratura

$$\alpha' \to \frac{\alpha'}{4}$$

si definisce poi

$$\vec{\pi}_{L/R} := \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\ \vec{p}_{L/R} \qquad [5.13]$$

$$\begin{pmatrix} \text{fattore} \\ \text{correttivo} \end{pmatrix} = \left(\frac{\sqrt{\alpha'\tau_2}}{V}\right)^d \sum_{m,n} q^{\frac{\vec{\pi}_L^2}{2}} \bar{q}^{\frac{\vec{\pi}_R^2}{2}} \qquad [5.14]$$

Una compattificazione in d dimensioni è caratterizzata da d^2 parametri. In due dimensioni un toro è caratterizzato da due moduli complessi, τ e la forma di Kähler (combinazione del volume del toro e di B_{ab}: tensore antisimm. che def. le direzioni del toro $\sim V + iB$). Per studiare i d^2 parametri si guardano le proprietà di invarianza modulare della [5.14].

---

(1) $\tau \to \tau + 1$ allora:

$$q \to q\, e^{2\pi i} \qquad \bar{q} \to \bar{q}\, e^{-2\pi i}$$

$$(\text{fattore corr.}) \to \left(\frac{\sqrt{\alpha'\tau_2}}{V}\right)^d \sum_{m,n} \left(q^{\frac{\vec{\pi}_L^2}{2}} \bar{q}^{\frac{\vec{\pi}_R^2}{2}}\right)\left(e^{i\pi(\vec{\pi}_L^2 - \vec{\pi}_R^2)}\right)$$

quindi la condizione di invarianza è

$$\vec{\pi}_L^2 - \vec{\pi}_R^2 \in 2\mathbb{Z} \qquad (\text{intero pari}) \quad [5.15]$$

La condizione di invarianza modulare per $\tau \to \tau + 1$ definisce un reticolo lorenziano pari (simmetria $SO(d,d)$).

La massa [57] invece dipende da

$$M^2 \sim \Pi_L^2 + \Pi_R^2$$

E' quindi invariante sotto le rotazioni che lasciano invarianti i vettori in d dimensioni, cioè sotto

$$SO(d) \times SO(d)$$

Quindi il gruppo residuo di simmetria che lascia invariante lo spettro di massa è

$$\frac{SO(d,d)}{SO(d) \times SO(d)}$$

Il # parametri del gruppo residuo è (localmente)

$$\frac{2d(2d-1)}{2} - 2 \cdot \frac{d(d-1)}{2} = d^2$$

---

(2) $\quad \tau \longrightarrow -\frac{1}{\tau}$

Dato un reticolo Γ, si definisce reticolo reciproco Γ^*, il reticolo definito da tutti i vettori che hanno prodotto scalare intero con i vettori di Γ

$$b \cdot a = n \qquad \begin{array}{l} b \in \Gamma^* \\ a \in \Gamma \end{array}$$

La $\delta(l-l')$ ha la seguente proprietà

$$\sum_{l' \in \Gamma} \delta(l-l') = \frac{1}{V_\Gamma} \sum_{l'' \in \Gamma^*} e^{2\pi i (l \cdot l'')} \qquad [5.16]$$

o

Consideriamo la [5.11] e la [5.14] e alleggeriamo la notazione $(\pi_L, \pi_R) \to (l, r)$ e usiamo la

$$\frac{1}{[\eta(\tau)\eta(\bar{\tau})]^d}\sum_{(l,r)\in\Gamma} e^{i\pi\tau l^2 - i\pi\bar{\tau} r^2} =$$

$$= \frac{1}{[\eta(\tau)\eta(\bar{\tau})]^d}\sum_{(l',r')\in\Gamma} \int d^d l\, d^d r\, e^{i\pi\tau l^2 - i\pi\bar{\tau} r^2}\delta^d(l-l')\delta^d(r+r') =$$

$$= \frac{1}{[\eta(\tau)\eta(\bar{\tau})]^d}\cdot\frac{1}{V_\Gamma}\sum_{(l'',r'')\in\Gamma^*} \int d^d l\, d^d r\, e^{i\pi\tau l^2 - i\pi\bar{\tau} r^2 - 2\pi i l\cdot l'' - 2\pi i r r''} =$$

$$= \frac{1}{[\eta(\tau)\eta(\bar{\tau})]^d V_\Gamma}\sum_{(l'',r'')\in\Gamma^*} \int d^d l\, d^d r\, e^{i\pi\tau\left(l+\frac{l''}{\tau}\right)^2 - \frac{i\pi}{\tau}(l'')^2 - i\pi\bar{\tau}\left(r+\frac{r''}{\bar{\tau}}\right)^2 + \frac{i\pi}{\bar{\tau}}(r'')^2} =$$

facendo gli integrali gaussiani si trova

$$= \frac{1}{[\eta(\tau)\eta(\bar{\tau})]^d V_\Gamma}\cdot\frac{1}{(\tau\bar{\tau})^{d/2}}\sum_{(l'',r'')\in\Gamma^*} e^{-\frac{i\pi}{\tau}(l'')^2} e^{+\frac{i\pi}{\bar{\tau}}(r'')^2}$$

ricordando che per $\tau \to -1/\tau$

$$\eta(\tau) \to \eta(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\eta(\tau)$$

allora

$$[\eta(\tau)\eta(\bar{\tau})]^d(\tau\bar{\tau})^{d/2} = [\eta(-1/\tau)\eta(-1/\bar{\tau})]$$

si ottiene che:

$$\frac{1}{[\eta(\tau)\eta(\bar\tau)]^d}\sum_{(l,r)\in\Gamma} e^{i\pi\tau l^2 - i\pi\bar\tau r^2} = \frac{1}{V_\Gamma\left[\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right)\eta\left(-\frac{1}{\bar\tau}\right)\right]^d}\sum_{(l^0,r^0)\in\Gamma^*} e^{-\frac{i\pi}{\tau}(l^0)^2 + \frac{i\pi}{\bar\tau}(r^0)^2}$$

[5.17]

Quindi per reticoli autoduali

$$\Gamma = \Gamma^* \qquad [5.18]$$

c'è invarianza sotto $\tau \to -1/\tau$. Infatti in generale si avrebbe $V_\Gamma = 1/V_{\Gamma^*}$. Quindi per un reticolo autoduale $V_\Gamma = 1$.

Complessivamente quindi:

inv. modulare $\Longleftrightarrow$ Γ pari e autoduale

5.4 Interpretazione Microscopica

Si è scritta l'azione di stringa bosonica come

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\xi\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}$$

Possiamo generalizzare questa azione ad una teoria descritta dall'azione:

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2z\sqrt{-\gamma}\left\{\gamma^{ab}\partial_a X^i\partial_b X^j g_{ij} + \epsilon^{ab}\partial_a X^i\partial_b X^j B_{ij}\right\} \quad [5.19]$$

con g_{ij} e B_{ij} matrici costanti.

Questa è una descrizione "microscopica" del reticolo: g_{ij} contiene $\frac{d(d+1)}{2}$ parametri e B_{ij} contiene $\frac{d(d-1)}{2}$ parametri, cioè in totale d^2 parametri, così come il gruppo di simmetria atteso $\frac{SO(d,d)}{SO(d)\times SO(d)}$.

Passando al gauge conforme si ottiene per la densità ~~di Lagrangiana l'espressione seguente:~~

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\alpha'}\left[-g_{ij}\dot{X}^i\dot{X}^j + g_{ij}X'^iX'^j + 2B_{ij}\dot{X}^iX'^j\right] \quad [5.20]$$

calcoliamo i momenti coniugati dati da

$$\pi_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}^i}$$

si ottiene

$$\pi_i = \frac{1}{2\alpha'}\cdot\left[\dot{X}^j g_{ij} - X'^j B_{ij}\right] \quad [5.21]$$

Costruiamo l'Hamiltoniana

$$H = \int d\sigma \left[\pi_i \dot{X}^i - \mathcal{L} \right] =$$

$$= \int d\sigma \, \frac{1}{4\pi\alpha'} \Big\{ 2\dot{X}^i \dot{X}^j g_{ij} - 2\dot{X}^i X'^j B_{ij} - \dot{X}^i \dot{X}^j g_{ij}$$
$$+ 2\dot{X}^i X'^j B_{ij} + g_{ij} X'^i X'^j \Big\} =$$

$$H = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma \left\{ g_{ij} \dot{X}^i \dot{X}^j + g_{ij} X'^i X'^j \right\} \qquad [5.22]$$

Restringiamoci a studiare gli <u>zero modi</u> delle dimensioni trasverse $\left(\int_0^\pi d\sigma = \pi \right)$

$$H = \frac{1}{4\alpha'} \left[g_{ij} \dot{X}^i \dot{X}^j + g_{ij} X'^i X'^j \right] \qquad [5.23]$$

Invertiamo la [5.21]

$$\dot{X}^i = 2\alpha' g^{ij} \left(\pi_j + \frac{B_{jk}}{2\alpha'} X'^k \right)$$

$$H = \alpha' g^{ij} \left(P_i + \frac{B_{ik}}{2\alpha'} X'^k \right) \left(P_j + \frac{B_{jl}}{2\alpha'} X'^l \right) + \frac{1}{4\alpha'} g_{ij} X'^i X'^j$$

poniamo gli zero modi come:

$$X^i = x^i + (2\alpha') v^i \tau$$

sostituendo nell' hamiltoniana

$$H = \alpha' g^{ij}\left(P_i + \frac{W^k B_{ik}}{\alpha'}\right)\left(P_j + \frac{W^l B_{jl}}{\alpha'}\right) + \frac{1}{\alpha'} g_{ij} W^i W^j$$

dal momento che

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = a^2 + b^2$$

si può scrivere

$$\pi_{Li} = P_i + \frac{B_{ij} W^j}{\alpha'} + \frac{g_{ij} W^j}{\alpha'}$$
$$\pi_{Ri} = P_i + \frac{B_{ij} W^j}{\alpha'} - \frac{g_{ij} W^j}{\alpha'} \qquad [5.24]$$

$$H = \frac{\alpha'}{2}\left(\pi_L^2 + \pi_R^2\right) \qquad [5.25]$$

5.5 Compattificazioni Toroidali aperte

Nel caso di stringhe aperte la compattificazione quantizza il momento $p \to m/R$, ma non introduce nessun numero di winding (una stringa aperta tenderà a slacciarsi).

Le funzioni di partizione anche in questo caso prendono un fattore correttivo:

$$A = \frac{N^2}{2} \frac{\sqrt{\frac{\alpha' \tau_2}{R}} \sum_m q^{\frac{\alpha'}{2}\frac{m^2}{R^2}}}{\tau_2^4 \left[\eta\left(\frac{i\tau_2}{2}\right)^8\right]} (V_8 - S_8) \qquad [5.26]$$

$$M = -\frac{N}{2} \frac{\sqrt{\frac{\alpha\tau_2}{R}} \sum_m q^{\frac{\alpha'}{2}\frac{m^2}{R^2}}}{\tau_2^4 [\eta(\frac{i\tau}{2})^8]} (\hat{V}_8 - \hat{S}_8) \qquad [527]$$

Rispetto al caso chiuso c'è una novità (come anche nel caso di stringa eterotica): si possono introdurre linee di Wilson. La stringa aperta ha 32 tipi di cariche a sx e dx sugli estremi. L'introduzione di una linea di Wilson "shifta" gli impulsi di un set m di queste cariche.

$$N \longrightarrow n, m, \bar{m}$$

Gli impulsi delle m cariche vengono spostati di un impulso α, quelli delle $\bar{m}$ cariche di $-\alpha$. Questo perché il campo di gauge è hermitiano, quello che si fa è identificare un sottogruppo

$$SO(32) \longrightarrow U(m) \times SO(32-2m)$$

<u>esempio</u>: rompo $SU(6)$ a $U(3)$

i vettori di base di $SU(6)$ saranno $(v_1, v_2, \dots v_6)$. Definendo nuovi vettori di base $w_1 = v_1 + iv_4$, $w_2 = v_2 + iv_5$, $w_3 = v_3 + iv_6$, è facile vedere che esiste una sottoclasse di matrici chiusa: delle diagonali a blocchi

$$\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A^* \end{array}\right]$$

Le N^2 cariche si spezzano in varie combinazioni di cariche con shift dei momenti diversi

$$\begin{aligned} n^2 &\longrightarrow 0 \\ nm &\longrightarrow \alpha \\ n\bar{m} &\longrightarrow -\alpha \\ m^2 &\longrightarrow 2\alpha \\ m\bar{m} &\longrightarrow 0 \\ \bar{m}^2 &\longrightarrow -2\alpha \end{aligned}$$

Quindi si ha che:

$$A \longrightarrow \left(\frac{n^2}{2} + m\bar{m}\right) \frac{\sum_k q^{\frac{\alpha'}{2}\frac{k^2}{R^2}}}{\eta\left(\frac{i\tau}{2}\right)^8} (V_8 - S_8) +$$

$$+ nm \frac{\sum_k q^{\frac{\alpha'}{2}\frac{(k+\alpha)^2}{R^2}}}{\eta\left(\frac{i\tau}{2}\right)^8} (V_8 - S_8) +$$

$$+ n\bar{m} \frac{\sum_k q^{\frac{\alpha'}{2}\left(\frac{k-\alpha}{R}\right)^2}}{\eta\left(\frac{i\tau}{2}\right)^8} (V_8 - S_8) + \frac{m^2}{2} \frac{\sum_k q^{\alpha'/2\left(\frac{k+2\alpha}{R}\right)^2}}{\eta\left(\frac{i\tau}{2}\right)^8} (V_8 - S_8)$$

$$+ \frac{\bar{m}^2}{2} \sum_k \frac{q^{\alpha'/2\left(\frac{k-2\alpha}{R}\right)^2}}{\eta\left(\frac{i\tau}{2}\right)^8} (V_8 - S_8)$$

Se:

- $\alpha \in \mathbb{N}$ la simmetria si ricompone $SO(32)$
- $\alpha \in \frac{\mathbb{N}}{2}$ il gruppo $U(m)$ si involve a $SO(2m)$

$$U(m) \times SO(32-2m) \longrightarrow SO(2m) \times SO(32-2m)$$

Nel caso della striscia di Möbius i termini sono lineari in N, ma il bordo è il doppio di lunghezza rispetto all'anello, quindi la linea di Wilson "conta" il doppio di spostamento degli impulsi.

$$\mathcal{M} \longrightarrow -\frac{n}{2} \frac{\sum_k q^{\frac{\alpha'}{2}\left(\frac{k}{R}\right)^2}}{\hat{\eta}\left(\frac{i\tau}{2}+\frac{1}{2}\right)^8} (V_8 - S_8) - \frac{m}{2} \frac{\sum_k q^{\frac{\alpha'}{2}\left(\frac{k+2\alpha}{R}\right)^2}}{\hat{\eta}^8\left(\frac{i\tau}{2}+\frac{1}{2}\right)} (V_8 - S_8)$$

$$- \frac{\bar{m}}{2} \sum_k \frac{q^{\alpha'/2\left(\frac{k-2\alpha}{R}\right)^2}}{\hat{\eta}\left(\frac{i\tau}{2}+\frac{1}{2}\right)^8} (V_8 - S_8)$$

6. LA STRINGA ETEROTICA

6.1 La stringa eterotica

Si può definire una teoria di stringa supersimmetrica e consistente in 10 dimensioni, detta stringa eterotica, combinando i modi destri della superstringa con i modi sinistri della stringa bosonica. Questo è possibile dal momento che nelle teorie di stringhe chiuse i modi destri e sinistri sono indipendenti, è quindi possibile avere stringhe con modi sinistri e destri differenti.

Le teorie di superstringa vivono in 10 dimensioni, quelle di stringa bosonica in 26. E' quindi necessario compattificare le 16 dimensioni "in più" delle coordinate bosoniche sinistre su qualche varietà interna. In questo modo si riescono ad introdurre gruppi di gauge di rango N, dove N è il numero di dim. extra.

L'invarianza modulare impone che la varietà compatta sia descritta da un reticolo di rango 16, euclideo, pari ed autoduale. In 16 dim. esistono solo due reticoli di questo tipo:

(a) il reticolo dei pesi di $Spin(32)/Z_2$

(b) il reticolo delle radici dell'algebra $E_8 \times E_8$

Le corrispondenti funzioni di partizione sono:

$$Z_{E_8 \times E_8} = \frac{1}{(\sqrt{\tau_2}\,\eta\bar{\eta})^8}\,(V_8 - S_8)(\bar{O}_{16} + \bar{S}_{16})(\bar{O}_{16} + \bar{S}_{16}) \qquad [6.1]$$

$$Z_{spin(32)/Z_2} = \frac{1}{(\sqrt{\tau_2}\eta\bar{\eta})^8}(V_8 - S_8)(\bar{O}_{32} + \bar{S}_{32}) \qquad [6.2]$$

Verifichiamo l'invarianza modulare. Le trasformazioni modulari sono

$$O_{2n} \xrightarrow{T} e^{-\frac{i\pi n}{12}} O_{2n}$$
$$V_{2n} \xrightarrow{T} -e^{-\frac{i\pi n}{12}} V_{2n}$$
$$S_{2n} \xrightarrow{T} e^{-\frac{i\pi n}{12}+\frac{i\pi n}{4}} S_{2n} = e^{i\pi n/6} S_{2n} \qquad [6.3]$$
$$C_{2n} \xrightarrow{T} e^{i\pi n/6} C_{2n}$$

$$\begin{pmatrix} O_{2n} \\ V_{2n} \\ S_{2n} \\ C_{2n} \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & i^{-n} & -i^{-n} \\ 1 & -1 & -i^{-n} & i^{-n} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} O_{2n} \\ V_{2n} \\ S_{2n} \\ C_{2n} \end{pmatrix} \qquad [6.4]$$

$$V_8 - S_8 \xrightarrow{T} -e^{-i\pi/3}(V_8 - S_8) = e^{2\pi i/3}(V_8 - S_8)$$
$$V_8 - S_8 \xrightarrow{S} V_8 - S_8$$
$$\tau_2^4(\eta\bar{\eta})^8 \xrightarrow{T,S} \tau_2^4(\eta\bar{\eta})^8 \quad \text{è invariante sotto } T \text{ ed } S$$
$$\bar{O}_{16} + \bar{S}_{16} \xrightarrow{T} e^{-i\pi 4/3}(\bar{O}_{16} + \bar{S}_{16})$$
$$\bar{O}_{32} + \bar{S}_{32} \xrightarrow{T} e^{i\pi 4/3}(\bar{O}_{32} + \bar{S}_{32})$$

$$(\bar{O}_{16}+\bar{S}_{16})^2 \xrightarrow{T} e^{-i\pi 8/3}(\bar{O}_{16}+\bar{S}_{16})^2 = e^{i\pi 4/3}(\bar{O}_{16}+\bar{S}_{16})^2$$

Inoltre $(\bar{O}_{16}+\bar{S}_{16})$ e $(\bar{O}_{32}+\bar{S}_{32})$ sono invarianti sotto la trasformazione S.
Ne segue che le 2 funzioni di partizione sono invarianti modulari.

6.2 Spettro di massa (vedere)

(1) $E_8 \times E_8$ Theory

Lo spazio delle particelle di massa nulla è il prodotto tensore dello spazio dei modi destri.
Dai modi sinistri si ha al livello più basso in massa un vettore, da V_8, o uno spinore da S_8. Per i modi destri si ha

$$\frac{1}{\eta^8}(\bar{O}_{16}+\bar{S}_{16})^2 \sim \frac{1}{q}$$

$$\frac{1}{\eta^8} \sim q^{-1/3} \qquad O_{16}^2 \sim q^{-2/3}$$

In termini di stati

$$\tilde{\alpha}_{-1}\ ,\ \lambda^{[i}_{-1/2}\lambda^{j]}_{-1/2} \quad \text{o} \quad \lambda'^{[i}_{-1/2}\lambda'^{j]}_{-1/2}$$

Combinando modi destri e sinistri

- $\tilde{\alpha}_{-1}$ + (modi sinistri) dà il multipletto di supergravità con $N=1$
- $\lambda\lambda$ e $\lambda'\lambda'$ + (modi sinistri) danno $(120,1)+(1,120)$ di SUSY YM.

(2) Analogamente per la $SO(32)$

$$(O_{32} + S_{32}) \sim \frac{1}{q}$$

$$\lambda\lambda \to 496 \quad \text{aggiunta di } SO(32)$$

6.3 Dualita'

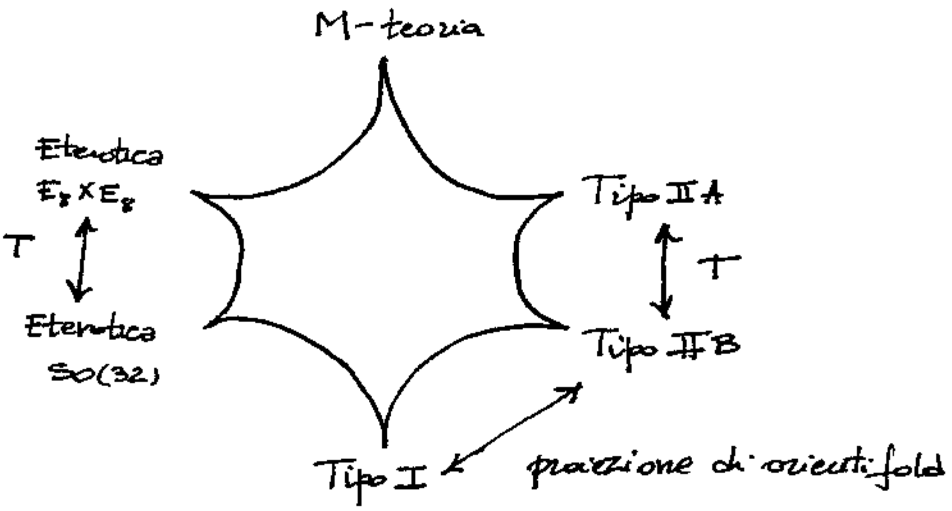
Si puo' dimostrare che compattificando stringhe eterotiche a 9 dimensioni e accendendo una deformazione continua; una linea di Wilson si rompe $SO(32)$ a $SO(16)\times SO(16)$, allo stesso modo si rompe $E_8\times E_8$ a $SO(16)\times SO(16)$.

Una linea di Wilson è un termine aggiuntivo alla Lagrangiana 2-dim. del tipo

$$\int A_i^{\,j}\, d^2 z$$

dove $A_i^{\,j}$ è un campo di gauge costante.

Quello che si vede è che le due teorie compattificate e ridotte al medesimo sottogruppo comune di simmetria sono legate da una trasformazione di T-dualità.



La teo. IIB $\xrightarrow{\text{(orientifold)}}$ I teoria $\xrightarrow[\text{su cerchio}]{\text{compattificando}}$

$\xrightarrow{\text{T-dualità}}$ (IIB $\rightarrow$ IIA)
le stringhe aperte vanno a terminare
su varietà di codimensione 1

$\xrightarrow[\text{superfici a } \infty]{\text{mandando le}}$ $\xrightarrow{\text{T-dualità}}$ IIA

20/05/2004

7. PATH INTEGRAL IN TEORIA DELLE STRINGHE

7.1 Espansione di Polyakov

Come nel caso delle particelle puntiformi, è possibile descrivere lo scattering di stringhe estendendo l'approccio del path integral di Feynman.
In questa formulazione una ampiezza di scattering in teo. delle stringhe è descritta come una somma su tutte le superfici connesse (somma sui world-sheets) che connetto delle date curve chiuse/aperte iniziali e finali, pesata con $\exp{iS}$.

$$Z = \sum_{\chi} \int \frac{(DX)(Dg)}{\mathrm{Vol}(G)} e^{-S_X - \lambda\chi} \qquad [7.1]$$

Vol(G) : volume del gruppo di gauge $= V_{diff \times Weyl}$

$$\chi = \frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma \sqrt{g}\, R^{(2)} \qquad [5.2]$$

χ è un invariante topologico. si può vedere che in generale

$$\chi = 2 - 2g - b - c \qquad [7.3]$$

g = # manici della superficie
h = # manici
c = # crosscaps

studiamo la teoria bosonica

$$S_X = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma \sqrt{g}\, g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}$$

porremo in una metrica conformemente piatta (gauge conforme)

$$g_{ab} = e^{2\phi}\delta_{ab}$$

Si può vedere che sotto trasformazione di Weyl

$$g_{ab} = e^{2\omega} g_{ab}$$

$$\sqrt{g}\, R \to \sqrt{g}\, R + 2\sqrt{g}\,\nabla\cdot\partial\omega = R' \qquad [7.4]$$

Si può sempre porre $R'=0$, risolvendo $2\nabla^2\omega = R$ in ω.
Questo è sempre possibile, almeno localmente.
In 2 dim. $R'=0$ implica l'annullamento dell'intero tensore di Riemann, infatti le simm. del tensore R_{abcd} implicano

---

$$R_{abcd} = \frac{1}{2}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc})R \qquad [7.5]$$

Quindi se $R'=0$ si ha una metrica piatta.

La scelta di una gauge è necessaria a causa dell'enorme overcounting contenuto nell'integrale. Le configurazioni (X, g) e (X', g') collegate dalla simm. locale diff x Weyl rappresentano la stessa configurazione fisica.

7.2 Il determinante di Faddeev-Popov

Dopo aver fissato la metrica, l'integrale funzionale correrà lungo un'orbita di gauge parametrizzata dalla sola X^μ. Per ottenere la corretta misura d'integrazione si segue la procedura di Faddeev-Popov.

Consideriamo una trasformazione della metrica

$$\zeta : g \to g^{\zeta}$$

Si definisce la misura di Faddeev-Popov $\Delta_{FP}(g)$ come

$$1 = \Delta_{F.P.}(g) \int (D\zeta)\, \delta(g - g^{\zeta}) \qquad [7.6]$$

$(D\zeta)$ è una misura gauge invariante sul gruppo diff × Weyl.
Si può dim. che $\Delta_{F.P.}$ è a sua volta gauge invariante.

7.3 String coupling

Il fattore $e^{-\lambda\chi}$ nell'espansione di Polyakov è una sorta di parametro d'espansione. Infatti χ è localmente una derivata totale in due dimensioni e dipende quindi solo dalla topologia del world-sheet. Il termine di Eulero nell'azione quindi definisce una costante d'accoppiamento

$$e^{\lambda} = g_s$$

$$Z \sim g_s^{2g-2}$$

Per stringhe chiuse, ad esempio, si ha che

$$\chi = 2 - 2g \qquad g = \# \text{ manici}$$

Quindi l'integrale funzionale è una somma pesata su world-sheet con # di manici crescente

si può vedere che λ è il valore di vuoto del dilatone

$$e^{\langle\phi\rangle} = e^{\lambda} = g_0 \qquad [\text{string-coupling}]$$

il dilatone ha però un potenziale piatto, non si può quindi determinare direttamente.

7.4 Gauge fixing

Inseriamo l'identità [5.6] nell'integrale funzionale

$$\int \frac{[DX][Dg][D\xi]}{\mathrm{Vol}(G)}\, \delta(g - g^{\xi})\, \Delta_{FP}(g)\, e^{-S_x[g]} =$$

$$= \int \frac{[DX][D\xi]}{\mathrm{Vol}(G)}\, \Delta_{F.P.}(g^{\xi})\, e^{-S_x[g^{\xi}]}$$

$\Delta_{F.P}$ e S_x sono gauge invarianti

$$\sim \int [DX]\, \Delta_{FP}(\hat{g})\, e^{-S_x(\hat{g})}$$

$$S_X[\hat{g}] = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\, \partial_a X^\mu \partial^a X^\nu \eta_{\mu\nu} \qquad \hat{g}: \text{ metrica piatta}$$

si ha quindi

$$Z \sim \Delta_{F.P.}(\hat{g})\,[\det(-\nabla^2)]^{-D/2}$$

- calcolo del determinante di Faddeev-Popov

Vogliamo calcolare il determinante di F.P. consideriamo variazioni infinitesime della metrica.

$$g_{ab} \to g^{(\omega)}_{a'b'} = e^{2\omega}\frac{\partial x^c}{\partial x'^a}\frac{\partial x^d}{\partial x'^b}\, g_{cd}(\omega)$$

$$\delta g_{ab} = 2\omega g_{ab} - \nabla_a \xi_b - \nabla_b \xi_a$$

consideriamo la [5.6] per questa trasf. della metrica

$$1 = \Delta_{FP}(\hat{g})\int [D\delta\omega][D\delta\xi]\,\delta(2\delta\omega g_{ab} - \nabla_a\delta\xi_b - \nabla_b\delta\xi_a)$$

definiamo:

$$2(P_1\delta\xi)_{ab} := \nabla_a\delta\xi_b + \nabla_b\delta\xi_a - g_{ab}\nabla\cdot\delta\xi$$

$$(P_1\delta\xi)_{ab} = (P_1\delta\xi)_{ba} \qquad g^{ab}(P_1\delta\xi)_{ab} = 0$$

(simmetrico a traccia nulla.)

$$1 = \Delta_{FP}(\hat{g}) \int [D\delta\omega][D\delta\xi]\, \delta[(2\delta\omega - \nabla\cdot\delta\xi) g_{ab} - 2(P_1 \delta\xi)_{ab}]$$

esponenziamo la funzione δ, introducendo un campo tensore simmetrico β^{ab}

$$1 = \Delta_{FP}(\hat{g}) \int [D\delta\omega][D\delta\xi][D\beta] \exp\left\{ i \int d^2\xi \sqrt{\hat{g}}\, \beta^{ab} [(\nabla\cdot\delta\xi - 2\delta\omega) g_{ab} + 2(P_1 \cdot \delta\xi)_{ab}] \right\}$$

Si può integrare in $\delta\omega$ si ha una funzione δ sulla traccia di β^{ab}. Questo porta β^{ab} ad essere a traccia nulla.

$$1 = \Delta_{FP}(\hat{g}) \int [D\delta\xi][D\hat{\beta}] \exp\left\{ 2i \int d^2\xi \sqrt{\hat{g}}\, \hat{\beta}^{ab} (P_1 \delta\xi)_{ab} \right\}$$

Si può invertire il path integral sostituendo ogni campo bosonico con un corrispondente campo anticommutante.

$$\Delta^{-1}_{F.P.} \longrightarrow \Delta_{F.P.} \text{ (var. anticommutanti)}$$

$$\Delta_{F.P.}(\hat{g}) = \int [D b^{ab}][D c^a] \exp\left\{ -\frac{1}{2\pi} \int d^2\xi \sqrt{\hat{g}}\, b^{ab} \nabla_a c_b \right\}$$

$$b^{ab}(P_1 c)_{ab} = b^{ab}(\nabla_a c_b + \nabla_b c_a - g_{ab} \nabla\cdot c) = 2 b^{ab} \nabla_a c_b$$

L'integrale funzionale si è quindi ridotto a:

$$Z = \int [DX][Db][Dc] \exp\left\{ -S_X - \frac{1}{2\pi} \int d^2\xi \sqrt{\hat{g}}\, b^{ab} \nabla_a c_b \right\}$$

introduciamo coordinate complesse:

$$z = x + iy \qquad \bar{z} = x - iy$$

$$\partial_z = \partial = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$$

$$\partial_{\bar z} = \bar\partial = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) \qquad \partial\bar\partial = \frac{1}{4}\partial^a\partial_a$$

$$2d^2z = 2dx\,dy = dz\,d\bar z \qquad \text{(trasformazione della misura)}$$

$$ds^2 = e^{2\omega}(dx^2 + dy^2) = e^{2\omega}dz\,d\bar z$$

$$g_{z\bar z} = g_{\bar z z} = \frac{1}{2}e^{2\omega}$$

$$\sqrt{g} = e^{2\omega} = 2g_{\bar z z}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int d^2z\sqrt{g}\,b^{ab}\nabla_a c_b = -\frac{1}{4\pi}\int d^2z\,2g_{z\bar z}\left\{b^{zz}\nabla_z c_z + b^{\bar z\bar z}\nabla_{\bar z}c_{\bar z}\right\}$$

$$b_{zz} = \frac{\partial x^\mu}{\partial z}\frac{\partial x^\nu}{\partial z}b_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 b_{xx} + 2\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial z}b_{xy} + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 b_{yy} =$$

$$= \frac{1}{4}b_{xx} - \frac{i}{2}b_{xy} - \frac{1}{4}b_{yy}$$

$$b_{z\bar z} = \frac{1}{4}(b_{xx} + b_{yy}) = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\,b = 0$$

$$b_{\bar z\bar z} = b^*_{zz}$$

$$S_{bc} = -\frac{1}{2\pi}\int d^2z\,(b_{\bar{z}\bar{z}}\nabla^{\bar{z}}c_z + b_{zz}\nabla^{\bar{z}}c_{\bar{z}}) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int d^2z\,(b\bar{\partial}c + \bar{b}\partial\bar{c})$$

La derivata covariante di un tensore con soli indici z fatta in $\bar{z}$, si riduce alla derivata semplice e viceversa. ($\nabla \to \partial$)

$$S_X = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\xi\,\sqrt{g}\,g^{ab}\partial_a X\cdot\partial_b X =$$

$$= \frac{1}{4\pi\alpha'}\int \frac{d^2z}{2}\cdot 2g_{z\bar{z}}\cdot 2g^{z\bar{z}}\,\partial X\cdot\bar{\partial}X =$$

$$= \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z\,\partial X\cdot\bar{\partial}X$$

La nostra teoria è diventata localmente una teoria libera:

$$Z \sim \int [DX][Db][Dc]\exp\left\{-\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z\,\partial X\bar{\partial}X - \frac{1}{2\pi}\int d^2z\,(b\bar{\partial}c + \bar{b}\partial\bar{c})\right\}$$

In questo integrale funzionale ci sono degli zero-modi degli operatori $\partial\bar{\partial}, \partial, \bar{\partial}$, dovremo tenerne conto per renderlo consistente.

- CKV: conformal Killing Vector

$$P_1\,\delta\xi = 0$$

$$\nabla_a\delta\xi_b + \nabla_b\delta\xi_a - g_{ab}\nabla\cdot\delta\xi = 0$$

per un vettore di Killing

$$\delta g_{ab} = \nabla_a \delta \xi_b + \nabla_b \delta \xi_a = 0$$

per un vettore di Killing conforme

$$\delta g_{ab} = \nabla_a \delta \xi_b + \nabla_b \delta \xi_a = g_{ab} \nabla \cdot \xi$$

$\delta \xi$ non è una simmetria della metrica, opera un riscalamento di Weyl.

Si può dim. un teorema generale:

<u>Teorema di Riemann-Roch</u>:

$$\# \text{CKV} - \# \text{moduli} = 3 - 3g$$

- si ha quindi:

superficie	# moduli	# CKV (compless.)
sfera $(g=0)$	0	3
toro $(g=1)$	1	1
$g>1$	$3g-3$	0

- sfera

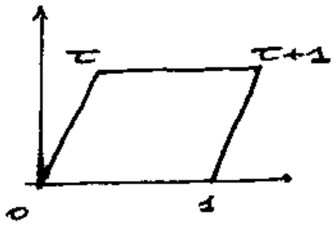
$$z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d} \qquad ad-bc=1 \qquad SL(2,\mathbb{C})$$

3 parametri complessi (6 reali)

(traslazione, dilatazione, rotazione + 3 "boost"

- toro: 1 simm. (traslazione)

parametro τ



- $g > 1$ nessun CKV , $3g-3$ moduli

- Zero Modi

Consideriamo un integrale bosonico (semplice):

$$I_1 = \int da\, db\; e^{-(a\ b)\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix}} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}$$

se si ha uno zero modo (ad es. $\alpha_1 = 0$)

$$\alpha_1 = 0 \qquad I_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha_2}} \mathrm{Vol}(a)$$

Dividendo per il Vol(a) si avra' quindi una quantita' ben definita.

Per un integrale fermionico questo non si può fare

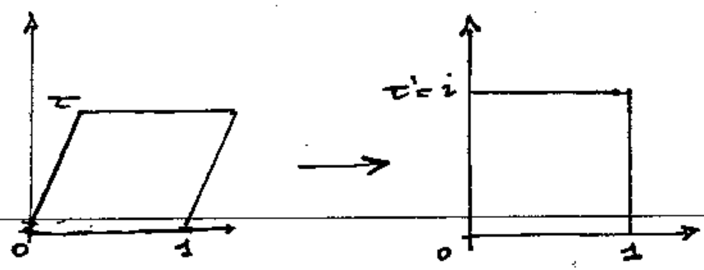
$$I_2 = \int d\bar{a}\, d\bar{b}\, da\, db\; e^{-(\bar{a}\ \bar{b})\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix}} = \alpha_1 \alpha_2$$

$$\alpha_1 = 0 \qquad I_2 = \int d\bar{a}\, d\bar{b}\, da\, db\; e^{-\alpha_2 \bar{b} b} = 0$$

L'unico sistema per dar senso all'integrale per i modi zero è quello di inserire le variabili anticommutanti mancanti.

$$I_2 := \int d\bar{a}\, d\bar{b}\, da\, db\, e^{-\alpha_2 \bar{b} b}\, \bar{a} a = \alpha_2$$

In generale la metrica sulla superficie di integrazione dipende da un certo n° di parametri. Nel caso, ad esempio, del toro, si ha un solo parametro di Teichmuller, τ. Consideriamo un cambio di variabili tale che la cella unitaria vada in:



$$z = \alpha w + \beta \bar{w} \qquad \text{(trasformazione non analitica)}$$

le trasformazioni dei vertici:

$$1 = \alpha + \beta \qquad \tau = i(\alpha - \beta)$$

$$\alpha = \frac{1 - i\tau}{2} \qquad \beta = \frac{1 + i\tau}{2}$$

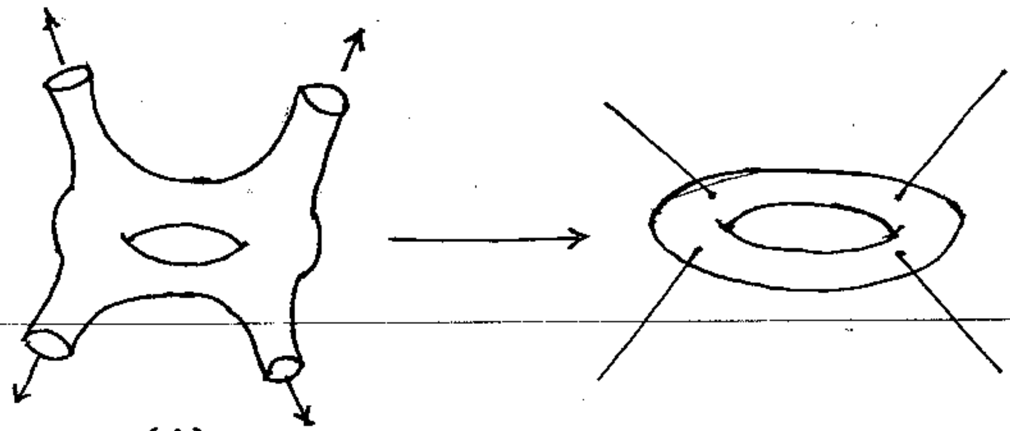
$$z = \frac{1-i\tau}{2} w + \frac{1+i\tau}{2} \bar{w}$$

Vogliamo andare a calcolare integrali funzionali del tipo

$$Z = \sum_{\chi} g_s^{-\chi} \int \frac{[DX][Dg]}{Vol(G)} e^{-S_X} \prod_{i=1}^{n} \int d^2 z_i \sqrt{g(z_i)}\, V_i$$

V_i : operatori di vertice

Ad esempio l'ampiezza di scattering ad 1 loop per 4 stringhe chiuse



(1) (2)

Il diagramma (1) non ha un senso ben definito dal punto di vista matematico. Facendo il limite di scattering da infinito si ottiene il diagramma (2). In una teoria conforme quello che conta è il rapporto fra il raggio e la lunghezza dei tubi di propagazione delle stringhe entranti e uscenti. Nel lim ∞ quindi sono equivalenti a "punture". La somma sui cammini sarà quindi una somma sulle posizioni delle punture. (anche in questo caso ci sarà un overcounting dovuto alle simm. conformi delle superfici)

Calcoliamo Δ_{FP} in modo rigoroso

$$1 = \Delta_{FP}(g, x_i) \int d^k t \, [D\xi] \, \delta(g - g^{\xi}) \prod_{(i,a)\in f} \delta(\sigma_i^a - \hat{\sigma}_i^a)$$

La produttoria sulle δ fissa un certo numero di vertici in relazione alle simmetrie della superficie.

La matrice di scattering

$$S = \sum_{\chi} g_s^{-\chi} \int_{\mathcal{F}} d^k t \int \frac{[DX][Dg][D\xi]}{Vol} e^{-S_x} \Delta_{FP} \, \delta(g - g^{\xi}) \cdot$$

$$\cdot \prod_{(i,a)\in f} \delta(\sigma_i^a - \hat{\sigma}_i^a) \prod_{i=1}^{n} \int d^2\sigma_i \sqrt{g(\sigma_i)} \, V_i$$

~~integrando~~

$$S = \sum_{\chi} g_s^{-\chi} \int_{\mathcal{F}} d^k t \int [DX] \, e^{-S_x} \Delta_{F.P.} \prod_{(i,a)\in f} \sqrt{\hat{g}(\sigma_i)} \, V(\sigma_i) \cdot$$

$$\cdot \prod_{(j,b)\notin f} \int d^2\sigma_j \sqrt{\hat{g}(\sigma_j)} \, V(\sigma_j)$$

scriviamo esplicitamente Δ_{FP}

$$\delta g_{ab} = \delta t^k \partial_k g_{ab} - 2(P_1 \delta\xi)_{ab} + (2\delta\omega - \nabla\cdot\delta\xi) g_{ab}$$

$$\frac{1}{\Delta_{F.P.}} = \int d^n\delta t \, [D\delta\xi][D\delta\omega] \, \delta\left[\delta t^k \partial_k g_{ab} - 2(P_1 \delta\xi)_{ab} + (2\delta\omega - \nabla\cdot\delta\xi) g_{ab} \right] \cdot$$

$$\cdot \prod_{(i,a)\in f} \delta(\sigma_i^a - \tilde{\sigma}_i^a)$$

esponenziando la $\delta[\;]$

$$\delta[\;] = \int [D\beta] \, e^{i\int d^2\sigma \sqrt{g}\, \beta^{ab} [\delta t^k \partial_k g_{ab} - 2(P_1\delta\xi)_{ab} + 2(\delta\omega - \nabla\cdot\delta\xi) g_{ab}]}$$

integrando su $\delta\omega$ si ha come prima che β^{ab} deve essere traceless

$$\frac{1}{\Delta_{F.P.}} = \int d^n\delta t \, [D\delta\xi][D\tilde{\beta}] \, e^{i\int d^2\sigma \sqrt{g}\, \tilde{\beta}^{ab} [\delta t^k \partial_k g_{ab} - 2(P_1\delta\xi)_{ab}]} \cdot$$

$$\cdot \prod_{(i,a)\in f} \delta(\sigma_i^a - \tilde{\sigma}_i^a)$$

passiamo a variabili anticommutanti

$$\Delta_{F.P.} = \int (d^h u) [Dc][Db] \, e^{\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma \sqrt{g}\, [\delta u^k \partial_k g_{ab} - 2(P_1 c)_{ab}]} \times$$

$$\times \prod_{(i,a)\in f} \delta(\bar{\sigma}_i^a - \hat{\sigma}_i^a)$$

[continua il 21/05]

riprendiamo il calcolo del $\Delta_{F.P.}$ esponenziamo anche la produttoria delle funzioni δ prima di passare a variabili anticommutanti.
Poniamo $\delta\bar{\sigma}_i^{\,a} = \sigma_i^{\,a} - \tilde{\sigma}_i^{\,a}$:

$$\frac{1}{\Delta_{F.P.}} = \int d^n \delta t \, [D\delta\xi][D\delta\beta] \, e^{i\int d^2\sigma \; \tilde{\beta}^{ab}\left[\delta t^k \partial_k g_{ab} - 2(P_1 \delta\xi)_{ab}\right]} \times$$

$$\times \prod_{(i,a)\in f} dx^{ia} \, e^{2\pi i x^i{}_a \delta\sigma^{ia}}$$

passiamo a variabili anticommutanti

$$\Delta_{F.P.} = \int d^n u \, [Dc][Db] \, e^{\int d^2\sigma \; b^{ab}\left[\delta u^k \partial_k g_{ab} - 2(P_1 c)_{ab}\right]} \times$$

$$\times \prod_{(i,a)\in f} d\eta^{i,a} \, e^{2\pi i \eta^i{}_a c^{ia}}$$

---

negli esponenziali conta solo la parte lineare nelle variabili anticommutanti (come noto dalla def. delle variabili grassmanniane)

$$\prod_{(i,a)\in f} d\eta^{i,a} \, e^{2\pi i \eta^i{}_a c^{ia}} \sim \prod_{(i,a)\in f} c^{i,a}$$

La prescrizione di mantenere alcuni vertici fissi si traduce in questo modo nel integrare i vertici fissi per i ghost.
$(d\eta^{i,a}\eta^i{}_a = 1)$

$$\Delta_{F.P.} = \int d^n u \, [Dc][Db] \, e^{\delta u^k \int d^2\sigma \, b^{ab} \partial_k g_{ab} - \int d^2\sigma \, b^{ab} (2P_1 c)_{ab}} \prod_{(i,a)\in f} c^{i,a}$$

integrando su $d^n u$ (integrale finito dimensionale)

$$= \int [Dc][Db] \, e^{\sum_k \delta u^k (b, \partial_k g)} \, e^{-\int d^2\sigma \, b^{ab}(2P_1 c)_{ab}} \prod_{(i,a)\in f} c^{i,a} =$$

$$= \int [Dc][Db] \, e^{-\int d^2\sigma \, b^{ab}(2P_1 c)_{ab}} \prod_k (b, \partial_k g) \cdot \prod_{(i,a)\in f} c^{i,a}$$

$k = 1, \dots, m$ $\quad m = \#$ parametri

$f = 1, \dots, n$ $\quad n = \#$ c.k.v.

Le due produttorie riassorbono tutti gli zero modi di b e di c e rendono l'integrale diverso da zero.

Riassumendo la prescrizione ottenuta è la seguente

1. si definisce l'azione della nostra teoria
2. si definiscono gli op. di vertice
3. si inseriscono nell'integrale funzionale tanti $(b, \partial_k g)$ quanti sono i moduli della superficie e tanti c e $\bar{c}$ quanti sono i CKV.

8. RICHIAMI DI CONFORMAL FIELD THEORY

8.1 Richiami di CFT

Un primo esempio di teoria conforme è l'azione di un bosone libero di massa nulla

$$S = \int dz d\bar{z}\, \partial_z X^\mu \partial_{\bar{z}} X^\nu \eta_{\mu\nu}$$

Consideriamo z e $\bar{z}$ come variabili indipendenti. Consideriamo una trasf. conforme, si ha:

$$\partial_z X^\mu = \partial_w X^\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$dz = dw \cdot \frac{\partial z}{\partial w}$$

quindi l'azione è invariante, le trasf. conformi sono una simmetria della azione.

L'idea di fondo delle teorie conformi è quella di trattare z e $\bar{z}$ come variabili indipendenti. In questo modo problemi bidimensionali si riducono a coppie di problemi unidimensionali.

I campi possono essere classificati nelle teorie conformi in <u>campi primari</u> e loro <u>campi discendenti</u>.
Una teoria con un numero finito di campi primari si dice <u>razionale</u>

In una teoria razionale si possono calcolare tutte le funzioni di correlazione con un numero finito di calcoli.

Gli operatori di vertice devono rappresentare l'effetto di stringhe che entrano da ∞ nel processo di scattering. Devono quindi essere oggetti locali che riportino le caratteristiche delle "particelle" entranti.

In M.Q. una particella libera ha funzione d'onda

$$e^{ip\cdot x}$$

In teo. delle stringhe si ha che

$$[\text{Operatori}]\, e^{ipX(z,\bar{z})}$$

ad esempio:

$$e^{ipX} \qquad \text{tachione}$$

$$h_{\mu\nu}\,\partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu e^{ipX} \qquad \text{gravitone}$$

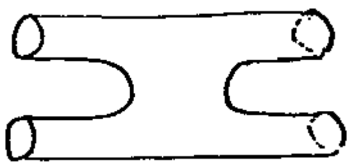
($h_{\mu\nu}$ simm. a traccia nulla)

$$b_{[\mu\nu]}\,\partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu e^{ipX} \qquad B_{\mu\nu}$$

In Teo. delle stringhe la simm. conforme ha un ruolo analogo alla simm. di gauge in teo. dei campi. Allo stesso modo delle teo. di gauge in teo. conformi si calcolano solo grandezze conformemente invarianti.

Una grandezza conformemente invariante è un campo primario di peso conforme $(0,0)$ o l'integrale in $dz\,d\bar{z}$ di un campo primario di peso conforme $(1,1)$

Nel caso di ampiezze del tipo



quello che si ha è che i pesi conformi sono

$$\begin{array}{lll} V \sim (1,1) & & \text{vertici} \\ c \sim (1,0) & \rule{0pt}{0pt} & \\ \bar{c} \sim (0,-1) & \Big\} & \text{ghost} \\ c\bar{c} \sim (1,-1) & & \end{array}$$

quindi l'ampiezza di scattering che sarà del tipo:

$$\int dz_3\, d\bar{z}_3 \langle c(1)\bar{c}(1) V(1)\, c(2)\bar{c}(2) V(2)\, V(3)\, c(4)\bar{c}(4) V(4)\rangle$$

sarà una grandezza conformemente invariante. Quindi alle ampiezze di scattering viste è possibile attribuire un significato a patto: 1) di considerare scattering da ∞ 2) di imporre $p^2 = m^2$, cioè p deve essere on-shell.

Quello che si calcola è quindi la matrice S.

Consideriamo una teo. con azione

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int dz d\bar{z} \partial X \bar{\partial} X$$

(1) calcoliamo la funzione a due punti, come in QFT si ha:

$$\int [DX] \frac{\delta}{\delta X(z,\bar{z})} \left[X(w,\bar{w}) e^{-S} \right] = 0$$

$$\int [Dx] \, \delta^{(2)}(z,w) e^{-S} - X(w,\bar{w}) \frac{\delta S}{\delta X(z,\bar{z})} e^{-S} = 0$$

calcoliamo la derivata funzionale dell'azione

$$\delta S = \frac{(-1)}{\pi\alpha'} \int dz d\bar{z} \, \delta X \partial \bar{\partial} X$$

$$\frac{\delta S}{\delta X(z,\bar{z})} = -\frac{1}{\pi\alpha'} \partial \bar{\partial} X$$

si ha

$$\int [DX] \, e^{-S} \left\{ \delta^{(2)}(z,w) + \frac{1}{\pi\alpha'} X(w,\bar{w}) \partial_z \partial_{\bar{z}} X(z,\bar{z}) \right\} = 0$$

$$\delta^{(2)}(z,w) + \frac{1}{\pi\alpha'} \partial_z \partial_{\bar{z}} \langle X(w,\bar{w}) X(z,\bar{z}) \rangle = 0$$

ricordando che

$$\partial \bar{\partial} = \frac{1}{4} \nabla^2$$

$$\nabla^2 \langle X(z,\bar{z}) X(w,\bar{w}) \rangle = -4\pi\alpha' \delta^{(2)}(z,w)$$

Questa è l'eq. di Laplace per un field carico. La $\delta^{(2)}$ è tale che

$$\int dz d\bar{z}\, \delta(z,w) = 1$$

passando a variabili ordinarie $dz d\bar{z} = 2 dx dy$, quindi in termini di δ ordinarie occorre scalare di un fattore $1/2$.

$$\nabla^2 V = -2\pi\, \delta(z)$$

$$\nabla^2 V = c \log |z|^2 =$$

$$= 2c \log r \qquad \text{soluzione di Laplace}$$

integrando su un cerchio intorno all'origine:

$$2\pi r \frac{\partial V}{\partial r} = -2\pi\alpha' \qquad \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2c}{r}$$

$$4\pi c = -2\pi\alpha' \Rightarrow c = -\frac{\alpha'}{2}$$

Quindi

$$\langle X(z,\bar{z}) X(w,\bar{w}) \rangle = -\frac{\alpha'}{2} \log |z-w|^2$$

(2) Tensore energia-impulso

Come nelle teo. scalari

$$T_{ab} = \partial_a X \partial_b X - \frac{1}{2} \delta_{ab} (\partial X)^2$$

Questo tensore è simm. e traceless

Si vedrà che (γ: coefficienti)

$$T_{zz} = \gamma (\partial_z X)^2$$

$$T_{\bar{z}\bar{z}} = \gamma' (\partial_{\bar{z}} X)^2$$

Questo è legato alle proprietà del campo X.

Un campo conforme primario di peso conforme $(h, \bar{h})$ è tale che

$$\langle \varphi(z,\bar{z}) \varphi(w,\bar{w}) \rangle = \frac{1}{(z-w)^h (\bar{z}-\bar{w})^{\bar{h}}} = \frac{1}{|z-w|^{2h}}$$

derivando il correlatore $\langle X(z,\bar{z}) X(w,\bar{w}) \rangle$ si ha:

$$\langle \partial_z X \, X(w,\bar{w}) \rangle = -\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{|z-w|}$$

$$\langle \partial_z X \, \partial_w X \rangle = -\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{(z-w)^2}$$

quindi X non è un buon campo conforme, la sua derivata sì.

$$\partial X \sim (1,0) \quad \text{peso conforme}$$

$$T_{zz} \sim (2,0)$$

Vogliamo fissare le costanti γ prima però studiamo in CFT il commutatore fra 2 cariche.

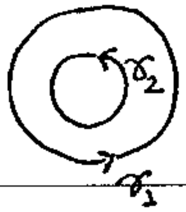
(3) ricordando che in $z, \bar{z}$ l'ordinamento è radiale (vedi p. 88)

$$Q = \oint \frac{dz}{2\pi i}\, j(z)$$

$$[Q_1, Q_2] = Q_1 Q_2 - Q_2 Q_1$$

$$Q_1 Q_2 = \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{dz_1}{2\pi i} \frac{dz_2}{2\pi i}\, j_1(z_1)\, j_2(z_2) \qquad (a)$$

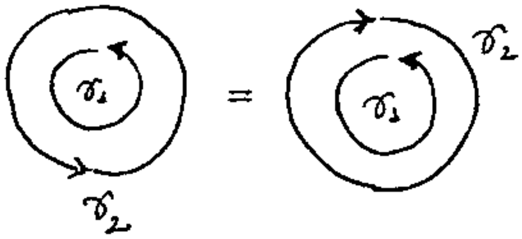
$$-Q_2 Q_1 = -\oint_{\gamma_1'} \oint_{\gamma_2'} \frac{dz_1}{2\pi i} \frac{dz_2}{2\pi i}\, j_2(z_2)\, j_1(z_1) \qquad (b)$$

(a) 

$R[j_1(z_1)\, j_2(z_2)]$

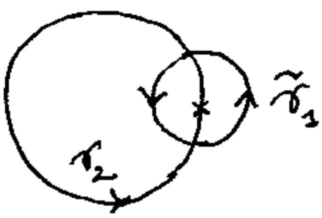
prodotto radialmente ordinato

per $|z_1| > |z_2|$

(b) (−) 

(invertiamo il verso di percorrenza di γ_2)

I contorni (a) e (b) quindi, sommati, sono equivalenti ad integrare sui contorni:

(c) 

si fissa un punto di γ_2 e si integra sul percorso $\tilde{\gamma}_1$ prima e poi su tutto γ_2.

$$[Q_1, Q_2] = \oint_{\gamma_2} \frac{dz_2}{2\pi i} \oint_{\tilde{\gamma}_1} \frac{dz_1}{2\pi i} \, R\left[j_1(z_1)\, j_2(z_2) \right]$$

Dal teorema di Cauchy si vede che si estrae il polo semplice in $\frac{1}{z_1 - z_2}$.

Le infinite cariche conservate sono i modi Laurent di una corrente olomorfa.

(4) Per un campo bosonico scalare (come per le stringhe)

$$\partial_z X = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2} \sqrt{2\alpha'}\, \alpha_n z^{-n-1}$$

si aveva

$$X = x + (2\alpha')p\tau + \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'} \sum_{n\neq 0} \left(\frac{\alpha_n}{n} e^{-i2n(\tau-\sigma)} + \frac{\tilde{\alpha}_n}{n} e^{i2n(\tau+\sigma)} \right)$$

nell' euclideo

$$X = x - 2\alpha' i p\tau + \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'} \sum_{n\neq 0} \left(\frac{\alpha_n}{n} e^{-2n(\tau-i\sigma)} + \frac{\tilde{\alpha}_n}{n} e^{-2n(\tau+i\sigma)} \right)$$

definiamo

$$z := e^{2(\tau+i\sigma)} \qquad z\bar{z} = e^{4\tau}$$

$$X = x - \frac{i}{2}\alpha' p \log(z\bar{z}) + \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'} \sum_{n\neq 0} \left[\frac{\alpha_n}{n} \bar{z}^{-n} + \frac{\tilde{\alpha}_n}{n} z^{-n} \right]$$

Ci si aspetta quindi che il correlatore

$$\langle \partial_z X \partial_w X \rangle = -\frac{\alpha'}{2}\frac{1}{(z-w)^2}$$

sia collegato all'algebra degli α_n che è nota essere

$$[\alpha_m, \alpha_n] = m\,\delta_{m+n,0}$$

Dalle espressioni date

$$\alpha_n = \frac{2i}{\sqrt{2\alpha'}} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^n \partial_z X$$

$$[\alpha_m, \alpha_n] = \frac{(2i)^2}{(2\alpha')} \oint_{\tilde{\gamma}_1} \frac{dz_1}{2\pi i} \oint \frac{dz_2}{2\pi i} z_1^m z_2^n \langle \partial_1 X \partial_2 X \rangle =$$

$$= \frac{(2i)^2}{(2\alpha')} \oint_{\tilde{\gamma}_1} \frac{dz_1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{dz_2}{2\pi i} z_1^m z_2^n \left\{ -\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{(z_1-z_2)^2} \right\} =$$

$$= \oint \frac{dz_2}{2\pi i} \oint \frac{dz_1}{2\pi i} \frac{z_1^m z_2^n}{(z_1-z_2)^2}$$

dal teo. di Cauchy

$$f(\xi) = \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-\xi)}$$

derivando

$$f'(\xi) = \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-\xi)^2}$$

$$[\alpha_m, \alpha_n] = m \oint \frac{dz_2}{2\pi i}\, z_2^{m+n-1} = m\, \delta_{m+n,0}$$

(5) In generale il prodotto di $T(z)$ con un campo primario $\phi(w)$ sarà (h peso conforme)

$$T(z)\,\phi(w) = \frac{h}{(z-w)^2}\,\phi(w) + \frac{1}{(z-w)}\,\partial_w \phi(w)$$

Definiamo anche

$$Q_\varepsilon = \oint \frac{dz}{2\pi i}\, \varepsilon(z)\, T(z) = L_n$$

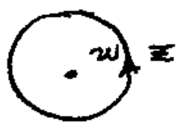
$$T(z) = \sum_n L_n z^{-n-2}$$

$$\varepsilon(z) \sim z^{n+1}$$

Consideriamo

$$\delta_\varepsilon \partial_w X \sim [Q_\varepsilon, \partial_w X] =$$

$$= \oint \frac{dz}{2\pi i}\, \varepsilon(z)\, T(z)\, \partial_w X$$



T ha peso conforme 2, è il quadrato di ∂X che ha peso conforme 1. Quindi si potranno avere solo termini con il giusto peso conforme, quelli interessanti saranno però solo quelli con un polo, per il teo. di Cauchy.

$$= \int \frac{dz}{2\pi i}\, \varepsilon(z) \left(\frac{h}{(z-w)^2} + \frac{1}{(z-w)}\, \partial_z \partial_w X \right) =$$

$$= h\,\varepsilon' \partial_w X + \varepsilon\, \partial_w^2 X$$

Lo stesso vale per qualunque campo primario.

$$\delta_\varepsilon \phi = h\,\varepsilon' \phi + \varepsilon \phi'$$

Questa formulazione è equivalente alla [ ]

---

(6) La regola trovata è la parte infinitesima della trasformazione

$$\phi(w,\bar{w}) = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{h} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{h}} \phi(z,\bar{z})$$

che è la definizione di un tensore conforme di pesi $(h,\bar{h})$

Infatti nel caso $\bar{h}=0$

$$\tilde{\phi}(w) = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{h} \phi(z)$$

consideriamo una t. infinitesima

$$w = z + \varepsilon(z)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 1 + \varepsilon'(z)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^h \simeq 1 + h\varepsilon'(z)$$

$$\tilde{\phi}(z) + \varepsilon\tilde{\phi}'(z) = (1 + h\varepsilon')\phi$$

$$\delta_\varepsilon\phi = h\varepsilon'\phi - \varepsilon\phi'$$

Cambiando segno ad ε ed h si ottiene la relazione di partenza.

(*) C'è un secondo modo per calcolare il correlatore

$$\langle 0 | \partial_z X \partial_w X | 0 \rangle = \qquad |z| > |w|$$

$$= -\frac{\alpha'}{2} \sum_{m,n} \langle 0 | \alpha_m \alpha_n | 0 \rangle z^{-m-1} w^{-n-1} =$$

$$= -\frac{\alpha'}{2} \sum_{\substack{m>0 \\ n<0}} \langle 0 | [\alpha_m, \alpha_n] | 0 \rangle z^{-m-1} w^{-n-1} =$$

$$= -\frac{\alpha'}{2} \sum_{\substack{m>0 \\ n<0}} m\, \delta_{n+m,0}\, z^{-m-1} w^{-n-1} =$$

$$= -\frac{\alpha'}{2} \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\frac{z}{w}\right)^{-m} \frac{1}{zw} =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m x^{m-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$= -\frac{\alpha'}{2}\frac{1}{z^2}\frac{1}{(1-w/z)^2} =$$

$$= -\frac{\alpha'}{2}\frac{1}{(z-w)^2}$$

(8) calcoliamo ora i coefficienti γ e γ' della [ ]

$$T = \gamma\,(\partial_z X)^2$$

$$T(z)\partial_w X = \gamma\, \partial_z X \partial_z X \partial_w X$$

Consideriamo le contrazioni possibili

$$= -\gamma \cancel{2} \frac{\alpha'}{\cancel{2}} \frac{\partial_z X}{(z-w)^2} = \quad \text{(espansione di Taylor)}$$

$$= -\gamma\alpha' \frac{\partial_w X}{(z-w)^2} - \frac{\gamma\alpha'}{(z-w)}\partial_w^2 X$$

$$\Longrightarrow \quad \gamma = -1/\alpha'$$

$$T = -\frac{1}{\alpha'}(\partial_w X)^2$$

(9) calcoliamo $T(z)T(w)$

$$L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} T(z) z^{n+1}$$

$$[L_m, L_n] = \oint_{\gamma_2} \frac{dw}{2\pi i} \oint_{\tilde{\gamma}_1} \frac{dz}{2\pi i} \, z^{m+1} w^{n+1} \, R\,[T(z)T(w)]$$

$$T(z)T(w) = \frac{1}{(\alpha')^2} (\partial_z X \partial_z X)(\partial_w X \partial_w X) + \begin{pmatrix} \text{contrazioni} \\ \text{singole} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{termine con} \\ \text{2 contrazioni} \end{bmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{(\alpha')^2} \cdot \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^2 \frac{1}{(z-w)^4} = \frac{1}{2} \frac{1}{(z-w)^4}$$

$$T(z)T(w) \sim \frac{1/2}{(z-w)^4} + \frac{1}{(\alpha')^2} \cdot 4 \cdot \left(-\frac{\alpha'}{2}\right)\left(\frac{\partial_z X \partial_w X}{(z-w)^2}\right)$$

espandendo in serie di Taylor il numeratore si ha

$$\begin{bmatrix} \text{secondo} \\ \text{termine} \end{bmatrix} \sim -\frac{2}{\alpha'} \left\{ \frac{(\partial_w X)^2}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w^2 X \, \partial_w X}{(z-w)} \right\}$$

---

quindi con le contrazioni si sono evidenziate le parti singolari:

$$T(z)T(w) \sim \frac{1/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{1}{(z-w)} \partial_w T$$

In generale in una teo. conforme invece di $1/2$ si ha $c/2$ come coeff. del 1° termine.

Rivediamo il teo. di Cauchy e le sue derivate

$$f(\xi) = \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{z-\xi}$$

$$f'(\xi) = \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-\xi)^2}$$

$$f''(\xi) = \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{2 f(z)}{(z-\xi)^3}$$

$$f'''(\xi) = \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{6 f(z)}{(z-\xi)^4}$$

$$[L_m, L_n] = \oint \frac{dw}{2\pi i} w^{n+1} \cdot \Big\{ \frac{c}{12} m(m^2-1) w^{m-2}$$

$$+ 2(m+1) w^m T(w) + w^{m+1} \partial_w T(w) \Big\}$$

integrando per parti il 2° termine e ricordando la def. di L_m

$$= (m-n) L_{m+n} + \frac{c}{12} m(m^2-1) \delta_{m+n,0}$$

(10) Calcoliamo il peso conforme dell'esponenziale

$$T(z)\, e^{ipX(w)} = -\frac{1}{\alpha'} (\partial_z X)^2 e^{ipX(w)}$$

e^{ipX} è normalmente ordinato, quindi si possono avere solo una o due contrazioni fra $(\partial_z X)^2$ e l'esponenziale, con molteplicità $2 \cdot n$ e $\frac{n(n-1)}{2}$

consideriamo i termini con due contrazioni

$$\langle \partial_z X\, X(w) \rangle = -\frac{\alpha'}{2}\cdot\frac{1}{(z-w)}$$

quindi si ha:

$$\begin{bmatrix}\text{termini con}\\ \text{2 contrazioni}\end{bmatrix} = -\frac{1}{\alpha'}\cdot 2\cdot\left(-\frac{\alpha'}{2}\right)^2 \frac{1}{(z-w)^2}\cdot \frac{n\cdot(n-1)}{2}\frac{(ip)^n}{(n-2)!}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix}\text{termini con}\\ \text{1 contrazione}\end{bmatrix} = -\frac{1}{\alpha'}\cdot 2\cdot\left(-\frac{\alpha'}{2}\right)^2 \frac{1}{(z-w)}\partial_z X\, \frac{(ip)^{n-1}}{(n-1)!}\,(ip)$$

$$\sum_n^{+}\{(1)+(2)\} = \frac{\alpha' p^2}{4}\cdot\frac{1}{(z-w)^2}\cdot e^{ipx} + ip\frac{\partial_z X}{(z-w)}\, e^{ipx}$$

dal momento che siamo interessati alla parte "polare" possiamo sostituire $\partial_z X$ con $\partial_w X$. Quindi:

$$T(z)\, e^{ipx(w)} = \frac{\alpha' p^2/4\, e^{ipX(w)}}{(z-w)^2} + \frac{1}{(z-w)}\partial_w e^{ipX(w)}$$

Se si avesse lavorato su molte X si avrebbe avuto

$$pX \longrightarrow p\cdot X$$

Per stringhe chiuse (nel caso del tachione), l'op. di vertice

$$\int dz\, d\bar{z}\, e^{ipx}$$

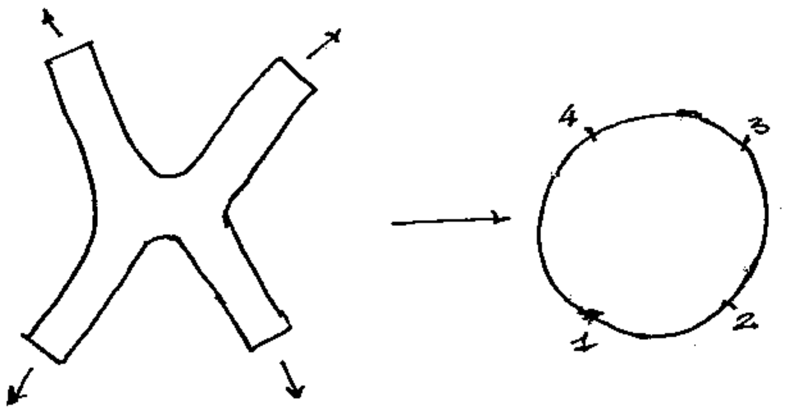
Nel caso di stringhe aperte, l'op. di vertice

$$\int dx\, e^{2ipx}$$

9. AMPIEZZE DI STRINGA

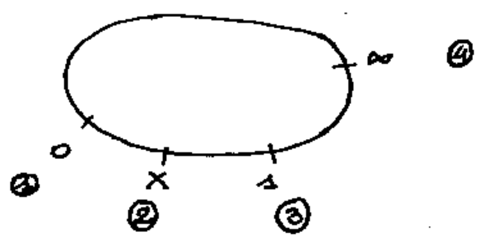
9.1 Ampiezza di Veneziano

L'ampiezza di scattering di stringhe aperte, con sorgenti a distanza ∞ è conformemente equivalente ad un disco con punture



Il disco può essere rappresentato come il semipiano superiore, in questo modo la coordinata del bordo è reale.

Consideriamo lo scattering di 4 stringhe aperte, poniamone 1 a $x = \infty$, una a $x = 0$, una ad 1 e l'ultima ad x generico, con $x \in [0, 1]$



$$B = \int dx_2 < C(1)\, V(1)\, V(2)\, C(3)\, V(3)\, C(4)\; V(4) >$$

la teoria non accoppia i ghost alle particelle quindi si ha

$$= \int dx_2 < C(1)\, C(3)\, C(4) > < V(1)\, V(2)\, V(3)\, V(4) >$$

La funzione di correlazione dei ghosts è:

$< C(1)\, C(3)\, c(4) > \sim \det C_0$

dove C_0 è la matrice degli zero modi: (costante, x, x^2)

$$\det C_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix} \sim x_{43}\, x_{31}\, x_{41}$$

Calcoliamo il correlatore dei 4 vertici nel caso di stringhe chiuse poi manderemo $p \to 2p$ per tornare al caso aperto.

Iniziamo dal prodotto di due esponenziali (studiamo le singolarità)

$$e^{ip_1 X(1)}\; e^{ip_2 X(2)}$$

ci sono infinite contrazioni, il termine generico sarà

$$\frac{(ip_1)^m}{m!} X^m(1) \;\; \frac{(ip_2)^n}{n!} X^n(2)$$

ci possono essere k contrazioni

quindi si avrà contraendo:

$$k!\binom{m}{k}\binom{n}{k}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^k\left(\log|z-w|^2\right)^k\frac{(ip_1)^m}{m!}X(1)^{m-k}\frac{(ip_2)^n}{n!}X(2)^{n-k}=$$

$$\binom{m}{k},\binom{n}{k} \quad \text{possibili scelte}$$

$$k! \quad \text{possibili contrazioni}$$

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$=\frac{(ip_1)^{m-k}X(1)^{m-k}}{(m-k)!}\cdot\frac{(ip_2)^{n-k}X(2)^{n-k}}{(n-k)!}\cdot\frac{1}{k!}\left(\frac{\alpha' p_1 p_2}{2}\right)^k\left(\log(z_1-z_2)^2\right)^k$$

risommando si ha:

$$e^{ip_1 X(z,\bar z)}e^{ip_2 X(w,\bar w)}\cdot|z_1-z_2|^{\alpha' p_1 p_2}$$

La funzione di correlazione

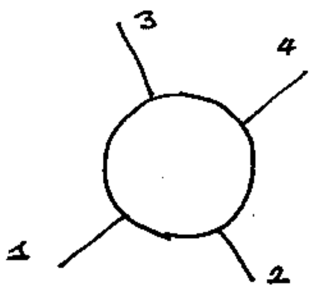
$$\langle e^{ip_1X_1}e^{ip_2X_2}e^{ip_3X_3}e^{ip_4X_4}\rangle\sim$$

$$\sim|z_{12}|^{\alpha' p_1p_2}|z_{13}|^{\alpha' p_1p_3}|z_{14}|^{\alpha' p_1p_4}\ldots\ldots$$

L'espressione trovata è una funzione analitica che ha le stesse singolarità del correlatore quindi per il teorema di unicità delle funzioni analitiche coincidono.

passiamo alle stringhe aperte: variabili reali e $p \to 2p$

$$\int dx_2 \; X_{41} X_{43} X_{31} (X_{21})^{2\alpha' p_1 \cdot p_2} (X_{32})^{2\alpha' p_3 \cdot p_2} (X_{31})^{2\alpha' p_3 \cdot p_1}$$
$$\cdot (X_{41})^{2\alpha' p_4 \cdot p_1} (X_{42})^{2\alpha' p_4 \cdot p_2} (X_{43})^{2\alpha' p_4 \cdot p_3} =$$



$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \qquad (a)$$
$$p_i^2 = \frac{1}{\alpha'} \qquad \text{tachioni}$$

$$\left\| \begin{array}{l} p_1 \cdot p_2 = p_3 \cdot p_4 \\ p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4 \\ p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3 \end{array} \right. \qquad (b)$$

queste relazioni valgono scegliendo quattro masse uguali (si ottengono quadrando primo e secondo membro della (a))

$$= \int dx_2 \; X_{41} X_{43} X_{31} \; (X_{21} X_{43})^{2\alpha' p_1 \cdot p_2} \cdot (X_{32} X_{41})^{2\alpha' p_2 \cdot p_3}$$
$$\cdot (X_{13} X_{24})^{2\alpha' p_1 \cdot p_3} =$$

Adesso introduciamo le variabili di Mandelstam.

$$s = -(p_1+p_2)^2 = -\frac{2}{\alpha'} - 2\,p_1\cdot p_2$$

$$t = -(p_3-p_1)^2 = -\frac{2}{\alpha'} + 2\,p_1\cdot p_3$$

$$u = -(p_4-p_1)^2 = -\frac{2}{\alpha'} + 2\,p_1\cdot p_4$$

$$s+t+u = -\frac{6}{\alpha'} + 2p_1\underbrace{(p_3+p_4-p_2)}_{p_1} = -\frac{4}{\alpha'}$$

da cui si ottiene

$$2\alpha'\,p_1\cdot p_2 = -2-\alpha' s$$

$$2\alpha'\,p_1\cdot p_3 = 2+\alpha' t = -2-\alpha' s-\alpha' u$$

$$2\alpha'\,p_1\cdot p_4 = 2+\alpha' u = -2-\alpha' s-\alpha' t$$

sostituendo e considerando 2 stringhe entranti e 2 uscenti (occorre cambiare segno all'esponente di $2\alpha' p_2\cdot p_3$ e $2\alpha' p_1\cdot p_3$, come regole di Feynman)

$$= \int dx_2\; x_{41}x_{43}x_{31}\,(x_{21}x_{43})^{-2-\alpha' s}\,(x_{32}x_{41})^{-2-\alpha' t}\,(x_{31}x_{24})^{+2+\alpha' t+\alpha' s} =$$

$$= \int dx_2\; \frac{x_{41}x_{43}x_{31}}{x_{21}^2\,x_{43}^2\,x_{32}^2\,x_{41}^2}\cdot(x_{31}^2x_{24}^2)\cdot\left(\frac{x_{21}\,x_{43}}{x_{31}\,x_{42}}\right)^{-\alpha' s}\cdot\left(\frac{x_{32}\,x_{41}}{x_{31}\,x_{42}}\right)^{-\alpha' t}$$

definiamo ora

$$y := \frac{x_{21}x_{43}}{x_{31}x_{42}} \qquad \text{"birapporto"}$$

si ha così che se

$$2 \to 1 \implies y \to 0$$
$$2 \to 3 \implies y \to 1$$
$$2 \to 4 \implies y \to \infty$$

y è anche un invariante proiettivo, sotto trasformazioni

$$X \to \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$ad - cb = 1 \qquad a, b, c, d \in R$$

è invariante.

si vede facilmente che

$$\frac{X_{32} X_{41}}{X_{31} \cdot X_{42}} = 1 - y$$

---

se $\quad 2 \to 3 \qquad = 0$

$\quad 2 \to 1 \qquad = 1$

$$= 1 - \frac{X_{21} X_{43}}{X_{31} X_{42}} = \frac{X_{31} X_{42} - X_{21} X_{43}}{X_{31} X_{42}} =$$

$$= \frac{(X_3 - X_1)(X_4 - X_2) - (X_2 - X_1)(X_4 - X_3)}{X_{31} X_{42}} =$$

$$= \frac{X_3 X_4 + X_1 X_2 - X_2 X_4 - X_1 X_3}{X_{31} X_{42}} = \frac{X_3 (X_4 - X_1) - X_2 (X_4 - X_1)}{X_{31} X_{42}} =$$

$$= \frac{X_{32} X_{41}}{X_{31} X_{42}}$$

$$dy = \frac{dx_2\, x_{43}}{x_{31}\, x_{42}} + dx_2 \frac{x_{21}\, x_{43}}{x_{31}\, x_{42}^2} =$$

$$= dx_2 \left(\frac{x_{43} x_{42} + x_{21} x_{43}}{x_{31}\, x_{42}^2} \right) = \frac{x_{43}\, x_{41}}{x_{31}\, x_{42}^2}\, dx_2$$

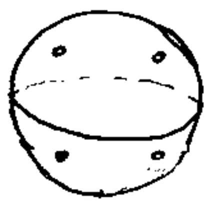
sostituendo si ha che l'ampiezza a 4 tachioni

$$B(s,t) = \int_0^1 dy\; y^{-2-\alpha' s} (1-y)^{-2-\alpha' t} =$$

$$= \frac{\Gamma(-1-\alpha' s)\, \Gamma(-1-\alpha' t)}{\Gamma(-2-\alpha'(s+t))}$$

9.2 Ampiezza di Shapiro-Virasoro

Calcoliamo l'ampiezza di scattering di 4 stringhe chiuse tachioniche.



Procediamo come nel caso di stringhe aperte.

$$\int dz_3 d\bar{z}_3\, |z_{13}|^2 |z_{14}|^2 |z_{34}|^2 \prod_{i<j} |z_{ij}|^{\alpha' p_i \cdot p_j} = G$$

$$m_i^2 = -\frac{4}{\alpha'}$$ massa tachione stringa chiusa

$$C = \int dz_3 d\bar{z}_3 \, |z_{13}|^2 |z_{14}|^2 |z_{34}|^2 \cdot |z_{12} z_{34}|^{\alpha' p_1 \cdot p_2} |z_{13} z_{24}|^{-\alpha' p_1 \cdot p_3} \cdot$$

$$\cdot |z_{14} z_{23}|^{-\alpha' p_2 \cdot p_3}$$

introduciamo le var. di Mandelstam

$$s = -(p_1 + p_2)^2 = -\frac{8}{\alpha'} - 2 p_1 \cdot p_2$$

$$t = -(p_1 - p_3)^2 = -\frac{8}{\alpha'} + 2 p_1 \cdot p_3$$

$$u = -(p_1 - p_4)^2 = -\frac{8}{\alpha'} + 2 p_1 \cdot p_4 = -\frac{8}{\alpha'} + 2 p_2 \cdot p_4 = -s - t - \frac{16}{\alpha'}$$

$$s + t + u = -\frac{16}{\alpha'}$$

$$\alpha' p_1 \cdot p_2 = -\frac{\alpha' s}{2} - 4$$

$$\alpha' p_1 \cdot p_3 = \frac{\alpha' t}{2} + 4$$

$$\alpha' p_2 \cdot p_3 = -\frac{\alpha' s}{2} - \frac{\alpha' t}{2} - 4$$

sostituendo

$$C = \int dz_2 d\bar{z}_2 \, |z_{13}|^2 |z_{14}|^2 |z_{34}|^2 \cdot \left| \frac{z_{12} z_{34}}{z_{14} z_{23}} \right|^{-\frac{\alpha' s}{2}} \left| \frac{z_{13} \cdot z_{24}}{z_{14} \cdot z_{23}} \right|^{-\frac{\alpha' t}{2}} \cdot$$

$$\cdot |z_{12} z_{34}|^{-4} \cdot |z_{13} z_{24}|^{-4} \cdot |z_{14} \cdot z_{23}|^4$$

definiamo

$$z := -\frac{z_{12} z_{34}}{z_{14} z_{23}} = \frac{z_{12} z_{34}}{z_{14} z_{32}}$$

si ha che

$$2 \to 4 \implies z \to 0$$
$$2 \to 3 \implies z \to \infty$$
$$2 \to 4 \implies z \to 1$$

si ha poi che

$$1 - z = \frac{z_{13} z_{24}}{z_{14} \cdot z_{23}}$$

$$2 \to 4 \implies 1-z \to 0$$
$$2 \to 1 \implies 1-z \to 1$$

$$dz = dz_2 \left\{ \frac{-z_{34}}{z_{14} z_{32}} + \frac{z_{12} z_{34}}{z_{14} z_{32}^2} \right\} = dz_2 \cdot \frac{z_{34} z_{31}}{z_{14} \cdot z_{32}^2}$$

---

si ha quindi che (N: normalizzazione)

$$G(s,t) = N \int_C dz\, d\bar{z}\, |z|^{-\frac{\alpha' s}{2} - 4} \cdot |1-z|^{-\frac{\alpha' t}{2} - 4}$$

[Ampiezza di Shapiro-Virasoro]

La normalizzazione può essere fissata imponendo l'unitarietà della matrice S. Vogliamo ora scrivere la Ampiezza di Shapiro Virasoro in funzione di funzioni Γ rendendo manifesta la simmetria in u, t ed s.

Consideriamo l'integrale

$$I = \int d^2z\, |z|^{-A}\, |1-z|^{-B}$$

utilizziamo la rappresentazione

$$|z|^{-A} = \frac{1}{\Gamma(A/2)} \int_0^\infty t^{A/2-1} e^{-t|z|^2} dt$$

$$I = \frac{1}{\Gamma(A/2)\Gamma(B/2)} \int_0^\infty t^{A/2-1} u^{B/2-1} dt\, du \cdot \int_{\mathbb{C}} dz\, d\bar{z}\, e^{-t|z|^2 - u|1-z|^2}$$

come visto $dz\, d\bar{z} = 2\, dx\, dy$

$$I = \frac{2}{\Gamma(A/2)\Gamma(B/2)} \int_0^\infty t^{A/2-1} u^{B/2-1} dt\, du \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, dy\, e^{-t(x^2+y^2) - u[(1-x)^2+y^2]}$$

---

svolgiamo gli integrali gaussiani

(1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-tx^2-(x-1)^2 u} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\left\{(t+u)\left(x^2 - \frac{2ux}{t+u}\right)+u\right\}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\left\{(t+u)\left[x-\frac{u}{t+u}\right]^2 - \frac{u^2}{t+u} + u\right\}} = e^{-\frac{tu}{t+u}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, e^{-(t+u)x'^2} =$$

$$= e^{-\frac{tu}{t+u}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{t+u}}$$

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-ty^2-uy^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t+u}}$$

quindi si ha:

$$I = \frac{2\pi}{\Gamma(A/2)\Gamma(B/2)} \int_0^\infty \frac{dt\,du}{t+u} \cdot t^{A/2-1} u^{B/2-1} e^{-\frac{tu}{t+u}}$$

eseguiamo un cambio di variabili

$$\xi = \frac{t}{t+u} \qquad \eta = u$$

$$\longrightarrow \quad t = \frac{\eta\xi}{1-\xi} \qquad u = \eta$$

$$dt\,du = \begin{vmatrix} \frac{\eta}{(1-\xi)^2} & \frac{\xi}{1-\xi} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\eta}{(1-\xi)^2}\, d\xi\, d\eta$$

si ha che

$$I = \frac{2\pi}{\Gamma(A/2)\Gamma(B/2)} \int_0^\infty d\eta \int_0^1 d\xi \, \frac{\eta}{(1-\xi)^2} \cdot \frac{(1-\xi)}{\eta\xi + \eta(1-\xi)} \cdot \left(\frac{\eta\xi}{1-\xi}\right)^{A/2-1} \cdot \eta^{B/2-1} e^{-\xi\eta} =$$

$$= \frac{2\pi}{\Gamma(A/2)\Gamma(B/2)} \int_0^\infty d\eta \int_0^1 d\xi \, \frac{1}{(1-\xi)} \cdot \left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^{A/2-1} \eta^{A/2+B/2-2} e^{-\xi\eta} =$$

$$= \frac{2\pi}{\Gamma(A/2)\Gamma(B/2)} \cdot \Gamma(A/2+B/2-1) \cdot \int_0^1 d\xi \, \frac{1}{1-\xi} \left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^{A/2-1} \frac{1}{\xi^{A/2+B/2-1}} =$$

nell' ultimo passaggio si è usata l' espressione

$$\int e^{-\alpha x} x^{z-1} dx = \frac{\Gamma(z)}{\alpha^z}$$

$$I = 2\pi \cdot \frac{\Gamma(A/2+B/2-1)}{\Gamma(A/2)\,\Gamma(B/2)} \int_0^1 dz\, z^{-B/2}(1-z)^{-A/2} =$$

$$= 2\pi \frac{\Gamma(A/2+B/2-1)}{\Gamma(A/2)\,\Gamma(B/2)} \frac{\Gamma(-A/2+1)\,\Gamma(-B/2+1)}{\Gamma(-A/2-B/2+2)} =$$

Quindi tornando all' ampiezza di Shapiro - Virasoro, identificando opportunamente i coefficienti A e B si ha:

$$A = \frac{\alpha' s}{2} + 4 \qquad\qquad B = \frac{\alpha' t}{2} + 4$$

$$A + B = \frac{\alpha' s}{2} + \frac{\alpha' t}{2} + 8 = -\frac{\alpha' u}{2}$$

poiché $s+t+u = -\frac{16}{\alpha'}$

---

definiamo

$$B(a,b,c) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(a+b)\,\Gamma(b+c)\,\Gamma(c+a)}$$

quindi

$$I = 2\pi\, B\left(1-\frac{A}{2},\ 1-\frac{B}{2},\ \frac{A+B}{2}-1\right)$$

ed infine l' ampiezza di Shapiro - Virasoro.

$$G(s,t) = 2\pi N\, B\left(-\frac{\alpha' s}{4}-1,\ -\frac{\alpha' t}{4}-1,\ -\frac{\alpha' u}{4}-1\right)$$

che è appunto manifestamente simmetrica in s, t ed u.

10. AZIONE EFFETTIVA DI BASSA ENERGIA

10.1 Generalizzazione dell'azione di stringa

L'azione di stringa nell'euclideo è:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{\gamma}\,\gamma^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} + \frac{\langle\Phi\rangle}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{\gamma}\,R^{(2)} \quad [10.1]$$

(1) Il termine topologico:

$$\chi = +\frac{\langle\Phi\rangle}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{\gamma}\,R^{(2)} = 2g-2 \quad [10.2]$$

nell'integrale funzionale ordina i successivi contributi dello sviluppo perturbativo euristico alla Polyakov.

$$e^{-S} \longrightarrow e^{-\langle\phi\rangle\chi+\dots} = \left(e^{\langle\phi\rangle}\right)^{2g-2}(\dots) =$$

$$= (g_s)^{2g-2}$$

Possiamo generalizzare il termine topologico

$$\langle\phi\rangle \longrightarrow \phi(X)$$

(termine di coupling del dilatone)

$$S_\phi = +\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{\gamma}\,R^{(2)}\Phi(X) \quad [10.3]$$

(2) La metrica piatta $\eta_{\mu\nu}$ può essere sostituita da una metrica curva

$$\eta_{\mu\nu} \longrightarrow G_{\mu\nu}$$

si ottiene:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{\gamma}\, \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \, G_{\mu\nu}(X) \qquad [10.4]$$

Considerando un espansione intorno ad una soluzione classica

$$X^\mu(\sigma) = x_0^\mu + Y^\mu(\sigma)$$

$$G_{\mu\nu}(X)\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu = \Big[G_{\mu\nu}(x_0) + G_{\mu\nu,\omega}(x_0) Y^\omega + \frac{1}{2} G_{\mu\nu,\omega\rho}(x_0) Y^\omega Y^\rho + \dots \Big] \partial_a Y^\mu \partial_b Y^\nu$$

Si ha una teoria interagente con un numero infinito di coupling.

(3) si può infine introdurre un termine di Wess-Zumino

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{\gamma}\; i\,\varepsilon^{ab} B_{\mu\nu}(X)\,\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \quad [10.5]$$

Per $B_{\mu\nu} = \text{cost.}$ questo termine scompare, diventa una derivata totale.

$$\varepsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu} = \varepsilon^{ab}\partial_a (X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu})$$

Inoltre questo termine è invariante di gauge:

$$\delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \zeta_\nu(X) - \partial_\nu \zeta_\mu(X)$$

$$\delta \mathcal{L}_B = 2i\,\varepsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu (\partial_\mu \zeta_\nu(X)) =$$

$$= 2i\,\varepsilon^{ab}\partial_b X^\nu \partial_a \zeta_\nu(X) =$$

$$= 2i\,\partial_a(\varepsilon^{ab}\partial_b X^\nu \zeta_\nu(X))$$

la variazione della Lagrangiana è una derivata totale

(4) L'azione che si è ottenuta descrive un "<u>modello sigma non lineare</u>".

$$dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu} \longrightarrow \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \gamma^{ab}\sqrt{\gamma}\; G_{\mu\nu}(X)$$

Riassumendo l'azione è

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma \sqrt{\gamma}\left[\left(\gamma^{ab}G_{\mu\nu}(X) + i\epsilon^{ab}B_{\mu\nu}(X)\right)\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu\right.$$

$$\left. + \alpha' R^{(2)}\phi(x)\right] \qquad [10.6]$$

La 10.6 è un'azione di stringa in presenza di condensati dei suoi modi di massa nulla $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$, Φ.

Come si è visto le costanti di accoppiamento sono derivate di $G_{\mu\nu}(x_0)$. Nello spazio target con scalare di curvatura R le derivate della metrica sono di ordine R^{-1}. La costante d'accoppiamento effettiva dimensionless è $\alpha'^{1/2} R^{-1}$. Per $\alpha'^{1/2} R^{-1} \ll 1$ l'accoppiamento è piccolo e si può fare una teoria perturbativa nei campi a 2-dim.
Nella stessa regione si può trascurare la struttura interna di stringa ($R \gg \alpha'^{1/2}$) e utilizzare teorie di campo effettive di basso energia.

10.2 Invarianza di Weyl ed equazioni del moto

Vogliamo vedere come, partendo dalla [10.6] che descrive la propagazione della stringa in presenza di condensati dei suoi modi di massa nulla, sia possibile ottenere le equazioni di moto dell'azione effettiva di basse energie, che si vedrà essere:

$$S_D = \frac{1}{2k^2}\int d^D X \sqrt{G}\, e^{-2\phi}\left[R + 4(\nabla_\mu \phi)^2 - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho}\right]$$

[10.7]

richiedendo che l'invarianza conforme sia preservata.

A questo scopo vogliamo calcolare la variazione sotto una trasformazione di Weyl della [10.6]. Per i primi due termini si farà il calcolo ad 1-loop in background field e per l'ultimo termine che è già di $O(\alpha')$ dal termine ad albero.

(a) Iniziamo dal termine del dilatone.

trasformazione di Weyl

$$\gamma_{ab} \longrightarrow e^{2\omega}\gamma_{ab}$$

in D-dim.

$$R^a{}_{bcd} \equiv \partial_d \Gamma^a_{bc} - \partial_c \Gamma^a_{bd} + \Gamma^a_{de}\Gamma^e_{bc} - \Gamma^a_{ce}\Gamma^e_{bd}$$

$$R_{bd} \equiv -R^a{}_{bad} = R^a{}_{bda}$$

$$R \equiv g^{bd} R_{bd}$$

$$\Gamma^a_{bc} \equiv \frac{1}{2} g^{ad}(\partial_c g_{db} + \partial_b g_{dc} - \partial_d g_{bc})$$

$$g_{ab} \to e^{2\omega} g_{ab} \qquad g^{ab} \to e^{-2\omega} g^{ab}$$

$$\Gamma^a_{bc} \to \Gamma^a_{bc} + \delta^a_b \partial_c \omega + \delta^a_c \partial_b \omega - g_{bc} g^{ad} \partial_d \omega$$

---

calcoliamo le componenti di $R^a{}_{bcd}$

$$\partial_d \Gamma^a_{bc} \to \partial_d \Gamma^a_{bc} + \delta^a_b \partial_c \partial_d \omega + \delta^a_c \partial_b \partial_d \omega$$
$$- \partial_d (g_{bc}) \partial^a \omega - g_{bc} \partial_d \partial^a \omega$$

$$\partial_d \Gamma^a_{bc} - \partial_c \Gamma^a_{bd} \to \partial_d \Gamma^a_{bc} - \partial_c \Gamma^a_{bd} + \delta^a_c \partial_b \partial_d \omega$$
$$- \delta^a_d \partial_b \partial_c \omega + [\partial_c (g_{bd}) - \partial_d (g_{bc})] \partial^a \omega$$
$$+ [-g_{bc} \partial_d + g_{bd} \partial_c] \partial^a \omega$$

$$\longrightarrow \partial_d \Gamma^a_{bc} - \partial_c \Gamma^a_{bd}$$

$$+ \delta^a_c \left(\nabla_d \partial_b \omega + \underset{(1)}{\Gamma^e_{bd} \partial_e \omega}\right) +$$

$$- \delta^a_d \left(\nabla_c \partial_b \omega + \underset{(2)}{\Gamma^e_{bc} \partial_e \omega}\right) +$$

$$+ \left(\underset{(5)}{\Gamma^e_{cb}\, g_{ed}} - \underset{(6)}{\Gamma^e_{db}\, g_{ec}}\right) \partial^a \omega +$$

$$+ \left(g_{bd} \nabla_c - g_{bc} \nabla_d\right) \partial^a \omega +$$

$$- \left(\underset{(4)}{g_{db}\, \Gamma^a_{ce}} - \underset{(3)}{g_{bc}\, \Gamma^a_{de}}\right) \partial^e \omega$$

$$\Gamma^a_{de} \Gamma^e_{bc} \longrightarrow \left(\Gamma^a_{de} + \delta^a_d \partial_e \omega + \delta^a_e \partial_d \omega - g_{de} \partial^a \omega\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\Gamma^e_{bc} + \delta^e_b \partial_c \omega + \delta^e_c \partial_b \omega - g_{bc} \partial^e \omega\right) =$$

$$= \Gamma^a_{de} \Gamma^e_{bc} + 2 \delta^a_d \partial_b \omega \partial_c \omega - \delta^a_d g_{bc} (\partial \omega)^2 +$$

$$+ \underline{\underline{\delta^a_b \partial_c \omega \partial_d \omega}} + \delta^a_c \partial_b \omega \partial_d \omega - \cancel{g_{bc} \partial^a \omega \partial_d \omega} +$$

$$- g_{bd} \partial^a \omega \partial_c \omega - g_{cd} \partial^a \omega \partial_b \omega + \cancel{g_{bc} \partial^a \omega \partial_d \omega} +$$

$$+ \underline{\Gamma^a_{bd} \partial_c \omega} + \underline{\underline{\Gamma^a_{cd} \partial_b \omega}} - g_{bc} \Gamma^a_{de} \partial^e \omega +$$

$$+ \delta^a_d \Gamma^e_{bc} \partial_e \omega + \underline{\Gamma^a_{bc} \partial_d \omega} - \Gamma^e_{bc} g_{de} \partial^a \omega$$

(termini simm. in c e d)

$$\Gamma^{a}_{de}\Gamma^{e}_{bc} - \Gamma^{a}_{ce}\Gamma^{e}_{bd} \longrightarrow \Gamma^{a}_{de}\Gamma^{e}_{bc} - \Gamma^{a}_{ce}\Gamma^{e}_{bd}$$

$$+ \delta^{a}_{d}\partial_b\omega\partial_c\omega - \delta^{a}_{c}\partial_b\omega\partial_d\omega$$

$$- \delta^{a}_{d}\, g_{bc}(\partial\omega)^2 + \delta^{a}_{c}\, g_{bd}(\partial\omega)^2$$

$$- g_{bd}\partial^a\omega\partial_c\omega + g_{bc}\partial^a\omega\partial_d\omega$$

$$- \underset{③}{g_{bc}\Gamma^{a}_{de}\partial^e\omega} + \underset{④}{g_{bd}\Gamma^{a}_{ce}\partial^e\omega}$$

$$+ \underset{②}{\delta^{a}_{d}\Gamma^{c}_{bc}\partial_c\omega} - \underset{①}{\delta^{a}_{c}\Gamma^{c}_{bd}\partial_c\omega}$$

$$- \underset{⑤}{\Gamma^{e}_{bc}\, g_{de}\partial^a\omega} + \underset{⑥}{\Gamma^{e}_{bd}\, g_{ce}\partial^a\omega}$$

i termini numerati si cancellano con i rispettivi termini di $\partial_d\Gamma^{a}_{bc} - \partial_c\Gamma^{a}_{bd}$. Quindi riassumendo:

$$R^{a}{}_{bcd} \longrightarrow R^{a}{}_{bcd} + \delta^{a}_{c}\nabla_d\partial_b\omega - \delta^{a}_{d}\nabla_c\partial_b\omega$$

$$+ g_{bd}\nabla_c\partial^a\omega - g_{bc}\nabla_d\partial^a\omega + \delta^{a}_{d}\partial_b\omega\partial_c\omega$$

$$- \delta^{a}_{c}\partial_b\omega\partial_d\omega - \delta^{a}_{d}\, g_{bc}(\partial\omega)^2 + \delta^{a}_{c}\, g_{bd}(\partial\omega)^2$$

$$- g_{bd}\partial^a\omega\partial_c\omega + g_{bc}\partial^a\omega\partial_d\omega \qquad [10.8]$$

$$R_{bd} \longrightarrow R_{bd} - \Big\{ (D-1)\nabla_d\partial_b\omega + g_{bd}\nabla\cdot\partial\omega$$

$$- \nabla_d\partial_b\omega + \partial_b\omega\partial_d\omega - D\partial_b\omega\partial_d\omega - g_{bd}(\partial\omega)^2$$

$$+ D g_{bd}(\partial\omega)^2 - g_{bd}(\partial\omega)^2 + \partial_b\omega\partial_d\omega \Big\} =$$

$$\delta S_\phi = \frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\sqrt{\gamma}\,\partial^a\delta\omega\,\partial_b\phi(X)\,\gamma^{ab}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\sqrt{\gamma}\,\partial_a\delta\omega\,\gamma^{ab}\partial_\mu\phi\,\partial_b X^\mu$$

nell'ultimo passaggio si è usato $\partial_a\phi(X) = \frac{\partial\phi}{\partial X^\mu}\cdot(\partial_a X^\mu(\sigma))$,

integrando ancora per parti:

$$\delta S_\phi = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\sqrt{\gamma}\,\delta\omega\left\{(\tilde\nabla^a\partial_a X^\mu)\partial_\mu\Phi(X) + \partial_a X^\mu\partial^a X^\nu\nabla_\nu\partial_\mu\phi\right\}$$

[10.13]

(b) Calcoliamo le eq. del moto del primo e del secondo termine dell'azione, per il campo X^μ

$$\delta S = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{\gamma}\{\gamma^{ab}G_{\mu\nu}\partial_a X^\mu\partial_b\delta X^\nu$$

$$+ i\varepsilon^{ab}B_{\mu\nu}\partial_a X^\mu\partial_b\delta X^\nu\} + \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{\gamma}\{\gamma^{ab}\partial_\rho G_{\mu\nu}\cdot$$

$$\cdot\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu\delta X^\rho + i\varepsilon^{ab}\partial_\rho B_{\mu\nu}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu\delta X^\rho]$$

$$R_{bd} \to R_{bd} - (D-2)\left[\nabla_d \partial_b \omega - \partial_b \omega \partial_d \omega + g_{bd} (\partial\omega)^2\right]$$
$$- (g_{bd} \nabla \cdot \partial\omega) \qquad [10.9]$$

$$R \to e^{-2\omega} R - \left\{(D-2)\, e^{-2\omega} \left[\nabla\cdot\partial\omega + (D-1)(\partial\omega)^2\right] + D\, e^{-2\omega}\, \nabla\cdot\partial\omega\right\} \qquad [10.10]$$

in $D = 2$

$$R_{bd} \to R_{bd} - g_{bd} \nabla\cdot\partial\omega \qquad [10.11]$$

$$\sqrt{g}\, R \to \sqrt{g} R - 2\sqrt{g}\, \nabla\cdot\partial\omega \qquad [10.12]$$

~~Ricordando che~~

$$S_\phi = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\gamma}\, R^{(2)} \phi(x)$$

dalla [10.12] si ha

$$\delta(\sqrt{\gamma}\, R) = -2\sqrt{\gamma}\, \nabla\cdot\partial\, \delta\omega$$

$$\delta S_\phi = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\gamma}\, \nabla_a \partial^a \delta\omega\, \phi(x)$$

integrando per parti

$$\delta S = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\sigma\,\sqrt{\gamma}\,\Big\{\gamma^{ab}\partial_\rho G_{\mu\nu}\partial_a X^\mu \delta X^\nu \partial_b X^\rho$$

$$+ i\,\epsilon^{ab}\partial_\rho B_{\mu\nu}\partial_a X^\mu \delta X^\nu \partial_b X^\rho + \gamma^{ab} G_{\mu\nu}(\nabla_b \partial_a X^\mu)\delta X^\nu\Big\}$$

$$+ \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\Big[\sqrt{\gamma}\,\gamma^{ab}\partial_\rho G_{\mu\nu}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \delta X^\rho +$$

$$+ \sqrt{\gamma}\, i\,\epsilon^{ab}\partial_\rho B_{\mu\nu}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \delta X^\rho\Big] =$$

$$\delta S = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\,\Big[\sqrt{\gamma}\,\gamma^{ab}(\partial_\rho G_{\mu\nu} - \partial_\nu G_{\mu\nu} - \partial_\mu G_{\nu\rho})\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \delta X^\rho$$

$$- \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\sigma\,\gamma^{ab} G_{\mu\nu}(\nabla_b \partial_a X^\mu)\delta X^\nu \sqrt{\gamma}$$

$$+ \frac{i}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\,\epsilon^{ab}\sqrt{\gamma}\,[\partial_\rho B_{\mu\nu} + \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\rho B_{\mu\nu}]\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \delta X^\rho$$

$$\delta S = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\Big[-\sqrt{\gamma}\,\gamma^{ab}\cdot 2\cdot \Gamma_{\rho\mu\nu}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \delta X^\rho +$$

$$- 2\sqrt{\gamma}\,\gamma^{ab} G_{\mu\nu}(\nabla_b \partial_a X^\mu)\delta X^\nu + i\sqrt{\gamma}\,\epsilon^{ab} H_{\mu\nu\rho}\cdot$$

$$\cdot\,\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \delta X^\rho\Big]$$

[10.14]

definiamo una derivata covariante anche rispetto allo spazio target

$$\tilde{\nabla}_b \partial_a X^\mu = \nabla_b \partial_a X^\mu + \Gamma^\mu_{\sigma\tau} \partial_a X^\tau \partial_b X^\sigma \qquad [10.15]$$

quindi:

$$-2\gamma^{ab} G_{\mu\nu} (\tilde{\nabla}_b \partial_a X^\mu) \delta X^\nu = -2\gamma^{ab} G_{\mu\nu} (\nabla_b \partial_a X^\mu) \delta X^\nu$$

$$-2\gamma^{ab} G_{\mu\nu} \Gamma^\mu_{\sigma\tau} \partial_a X^\tau \partial_b X^\sigma \delta X^\nu =$$

$$= -2\gamma^{ab} G_{\mu\nu} (\nabla_b \partial_a X^\mu) \delta X^\nu - 2\gamma^{ab} \Gamma_{\nu\sigma\tau} \partial_a X^\tau \partial_b X^\sigma \delta X^\nu$$

sostituendo nella [10.14]

$$\delta S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left\{ -2\sqrt{\gamma}\, \gamma^{ab} G_{\mu\nu} (\tilde{\nabla}_b \partial_a X^\mu) \delta X^\nu \right.$$

$$\left. + i\, \epsilon^{ab} \sqrt{\gamma}\, H_{\mu\nu\rho} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \delta X^\rho \right\}$$

l'eq. del moto è

$$\tilde{\nabla}_a \partial^a X_\mu = \frac{i}{2} \epsilon^{ab} \partial_a X^\nu \partial_b X^\rho H_{\mu\nu\rho} \qquad [10.16]$$

(c) sostituiamo la [10.16] nella [10.13] si ha

$$\delta S_\phi = -\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma \sqrt{\gamma}\,\delta\omega \left\{ i\varepsilon^{ab}\partial_a X^\nu \partial_b X^\rho H_{\mu\nu\rho}\partial^\mu \Phi(X) \right.$$

$$\left. + 2\gamma^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \nabla_\mu \partial_\nu \Phi \right\} \qquad [10.17]$$

E' utile osservare che la [10.17] è un controtermine, in generale la rinormalizzazione delle funzioni d'onda consiste in una ridefinizione

$$\phi \longrightarrow \phi + \alpha' \delta\phi$$

La variazione dell'azione per una ridefinizione dei campi è proporzionale alle eq. del moto

$$S(\phi') = S(\phi + \alpha'\delta\phi) = S + \alpha' \frac{\delta S}{\delta\phi}\cdot\delta\phi$$

Gli altri contributi a quest'ordine sono calcolati dai contributi ad 1 loop dell azione effettiva.
Per il calcolo occorre introdurre il background field method, l'algoritmo di t'Hooft, il metodo delle coordinate normali di Riemann

(d) Background Field Method

Per calcolare il contributo ad 1 loop dell'azione effettiva (variazione dell'azione effettiva) si possono usare 2 metodi

1) partire dalla definizione dell'azione effettiva del funzionale generatore delle funzioni di Green

$$Z(J) = \int e^{-S - \int J\phi} [D\phi]$$

$W(J) = \ln Z(J)$ (funzionale generatore delle funzioni connesse)

e tramite una t. di Legendre definire

$W(J) = \Gamma(\bar{\varphi}) + \int J\bar{\varphi}$ (Γ genera le funzioni irriducibili ad 1 particella)

$$\bar{\varphi} = \frac{\delta W}{\delta J} \qquad \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\varphi}} = -J$$

2) background field method

solitamente le funzioni di correlazione del campo vengono considerate oggetti fisici fondamentali. In alcuni casi però alcuni (o tutti) funzionali locali del campo che hanno una parte lineare non triviale in ϕ sono equivalenti. Ad esempio:

2

i) alcuni modelli sono definiti su manifold reimanniani e i campi $\phi_i(x)$ corrispondono a una particolare scelta di coordinate sulla varietà. Per alcuni problemi solo le quantità intrinseche alla varietà sono indipendenti.

ii) nelle teorie di gauge solo le quantità gauge indipendenti sono fisiche, cambio della gauge corrisponde a ridefinizioni dei campi

iii) gli elementi della matrice S normalizzata sono invarianti sotto un cambio di variabili di campo.

Il background field method conserva esplicitamente una sorta di invarianza di gauge e questa è particolarmente utile in special modo nei calcoli ad 1 loop.

~~Consideriamo l'azione effettiva come un funzionale $\Gamma[A]$~~

di campi classici. $\Gamma[A]$ è la somma dei diagrammi connessi irriducibili ad 1 particella calcolati in una teoria in cui i campi quantistici A' su cui si integra sono sostituiti nell'azione con campi $A'+A$ ed il path integral e calcolato con i campi A (non primati) fissati.

Possiamo scegliere la funzione di gauge-fixing $f_\alpha(x)$ nella maniera più opportuna. Invece della scelta usuale $f_\alpha(x) = \partial_\mu A'^\mu$, scegliamo

$$f_\alpha = \partial_\mu A'^\mu_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A'^\mu_\gamma$$

Questa scelta rende i termini di gauge fixing $f_\alpha f_\alpha$ invarianti sotto una trasformazione formale in cui il campo di background A^μ_α trasforma come un campo di gauge mentre il campo quantistico A'^μ_α trasforma in modo omogeneo come un campo ordinario di materia che appartenga alla rappresentazione aggiunta del gruppo di gauge.

$$\delta A^\mu_\alpha = \partial^\mu \epsilon_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma}\, \epsilon_\beta\, A^\mu_\gamma$$

$$\delta A'^\mu_\alpha = - C_{\alpha\beta\gamma}\, \epsilon_\beta\, A'^\mu_\gamma$$

Le proprietà di f_α di trasformazione possono essere rese più manifeste scrivendo una derivata covariante nella forma

$$f_\alpha \equiv \bar{D}_\mu A'^\mu_\alpha$$

~~dove per ogni campo nell'aggiunta~~

$$\bar{D}_\mu \phi_\alpha \equiv \partial_\mu \phi_\alpha + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} \phi_\gamma$$

si vede che sotto le trasformazioni di A e A'

$$\delta f_\alpha = - C_{\alpha\beta\gamma}\, \epsilon_\beta\, f_\gamma$$

e quindi $f_\alpha f_\alpha$ nella lagrangiana modificata

$$\delta(f_\alpha f_\alpha) = -2\, C_{\alpha\beta\gamma}\, f_\alpha\, \epsilon_\beta\, f_\gamma = 0$$

anche la $\mathcal{L}$ della teoria dipende da A e A' solo attraverso la somma $(A + A')$ che trasforma sotto le trasformazioni di A e A' come per una ordinaria trasformazione di gauge:

$$\delta(A^\mu_\alpha + A'^\mu_\alpha) = \partial^\mu \epsilon_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma}\,\epsilon_\beta (A^\mu_\gamma + A'^\mu_\gamma)$$

Dal momento che si integra su A' e si presume che la misura dell' integrale funzionale sia invariante sotto semplici trasformazioni come quelle definite, allora ci si aspetta che l'azione effettiva sia gauge invariante come l'azione originaria.

Questa invarianza di gauge formale riduce a forti vincoli sugli infiniti che possono occorrere nell'azione effettiva. Le divergenze ultraviolette compaiono nei coefficienti di termini la cui dimensione in massa è $d \leq 4$. Nel nostro caso questi termini sono invarianti sotto le trasformazioni di gauge del campo di background.

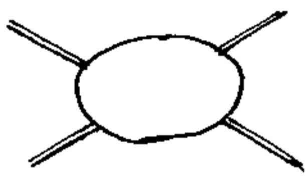
Ad es. in una teo. di pura gauge

$$\Gamma_\infty = \int d^4x\, \mathcal{L}_\infty$$

$$\mathcal{L}_\infty = -\frac{1}{4} e_A\, F_{\alpha\mu\nu} F_\alpha{}^{\mu\nu}$$

$$F_{\alpha\mu\nu} = \partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu} + C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A_{\gamma\nu}$$

Quindi nei calcoli ad 1 loop basta calcolare il diagramma a quattro punti con soli campi di background esterni.



(e) Espansione nel campo di background :

Vogliamo fare una espansione del campo X

$$X^\mu \to X^\mu + X'^\mu$$

per poi tenere per il b.f.m. solo i termini quadratici in X'^μ (campo quantistico). Per fare questo shift occorre rispettare la geometria dello spazio target (metrica $G_{\mu\nu}$). E' utile usare le coord. di Riemann.

Ricapitoliamo: (in generale)

$$e^{W(J)} = \int [d\phi]\, e^{-S(\phi)+J\phi}$$

si introduce una trasf. di Legendre

$$e^{-\Gamma(\varphi)+J\varphi} = \int [d\phi]\, e^{-S[\phi]+J\phi}$$

$$J(x) = \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi(x)}$$

sostituiamo

$$\phi \to \varphi + \chi$$

$$e^{-\Gamma(\varphi)} = \int [d\chi] \exp\left[- S(\chi+\varphi) + \int dx\, \chi(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi(x)} \right]$$

se $\varphi_c(x)$ è soluzione non banale di

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi} = 0$$

si ha

$$e^{-\Gamma(\varphi_c)} = \int [d\chi]\, e^{-S(\chi+\varphi_c)}$$

introducendo quantità rinormalizzate:

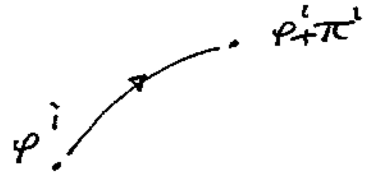
$$\Gamma_r(\varphi_c) = -\ln \int [d\chi] \exp\left[- S_0(\chi+\varphi_c) + \text{controterm.} \right]$$

S_0 è l'azione all'ordine ad albero.

Dal momento che vogliamo che la nostra teoria sia invariante di scala vogliamo calcolare dall'azione effettiva la "funzione del gruppo di rinormalizzazione".

Metodo delle coordinate di Riemann

Sia φ^i un punto su una varietà e π^i uno shift del punto. Se si deve espandere un'azione $S[\phi+\pi]$ in serie di potenze di π^i la difficoltà sta nel fatto che i termini dell'espansione in serie di potenze sono non covarianti dal momento che π^i è definito come differenza delle coordinate fra due punti vicini sulla



varietà e quindi non trasforma in maniera semplice sotto riparametrizzazioni.

Si può esprimere π^i come una serie di potenze in un nuovo campo ξ^i che sia covariante. Dal momento che l'azione è uno scalare anche i coeff. saranno scalari.

Assumiamo che φ^i e $\varphi^i+\pi^i$ siano sufficientemente vicini da ammettere una sola geodetica che li unisca. Questa può essere parametrizzata nella forma $\lambda^i(t)$, $0\leq t\leq 1$

$\lambda(0)=\varphi^i$, $\lambda(1)=\varphi^i+\pi^i$

$$\ddot{\lambda}^i+\Gamma^i_{jk}\dot{\lambda}^j\dot{\lambda}^k$$

Il vettore nello spazio tangente è definito a $t=0$ da

$$\xi^i=\dot{\lambda}^i(0)$$

ξ^i è un campo definito sullo spazio tempo e trasforma come un vettore controvariante sotto riparametrizzazioni della varietà.

Derivando successivamente l'eq. delle geodetiche si ha che la soluzione può essere scritta nella forma

$$\lambda^i(t) = \phi^i + \xi^i t + \frac{1}{2} \Gamma^i_{j_1 j_2} \xi^{j_1} \xi^{j_2} t^2 - \frac{1}{3!} \Gamma^i_{j_1 j_2 j_3} \xi^{j_1} \xi^{j_2} \xi^{j_3} t^3 + \dots \qquad [10.18]$$

dove

$$\Gamma^i_{j_1 j_2 j_3} = \partial_{j_1} \Gamma^i_{j_2 j_3} - \Gamma^l_{j_1 j_2} \Gamma^i_{l j_3} - \Gamma^l_{j_1 j_3} \Gamma^i_{j_2 l}$$

$$= \nabla_{j_1} \Gamma^i_{j_2 j_3}$$

(ecc....)

con la derivata covariante fatta sugli indici bassi e calcolate in ϕ^i.

A $t=1$ si ha $\lambda^i(1) = \phi^i + \pi^i$ e la [10.18] può essere vista come una definizione di una trasformazione di coordinate fra un punto $\phi^i + \pi^i$ nell'intorno di ϕ^i ed una nuova coordinata ξ^i.

Naturalmente due punti generici $\phi^i + \pi^i$ e $\phi^i + \pi'^i$ su una geodetica comune passante per ϕ^i avranno coordinate normali ξ^i e ξ'^i collegate da

$$\xi^{i\prime} = \frac{s'}{s} \xi^i$$

dove s' e s sono lunghezze d'arco da ϕ^i. Cioè le geodetiche in coordinate normali sono linee rette della forma

$$\xi^i(t) = at$$

Dal momento che la [10.18] vale in ogni sistema di coordinate, in coord. normali i coeff. $\overline{\Gamma}^i_{j_1 \cdots j_n}$ devono annullarsi quando simmetrizzati negli indici bassi.

$$\overline{\Gamma}^i_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} = 0 \qquad [10.19]$$

per induzione si dim. facilmente che la [10.19] è equivalente a

$$\partial_{(j_1} \partial_{j_2} \cdots \partial_{j_{n-2}} \overline{\Gamma}^i_{j_{n-1} j_n)} = 0 \qquad [10.20]$$

questo implica in particolare che

$$\overline{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} = 0$$

quindi in coord. normali il tensore di Riemann

$$\bar{R}^{i}_{\ jkl} = \partial_k \bar{\Gamma}^{i}_{jl} - \partial_l \bar{\Gamma}^{i}_{jk}$$

e muovendo gli indici

$$\bar{R}^{i}_{\ lkj} = \partial_k \bar{\Gamma}^{i}_{jl} - \partial_j \bar{\Gamma}^{i}_{kl} \qquad [10.21]$$

quindi

$$\bar{R}^{i}_{\ jkl} + \bar{R}^{i}_{\ lkj} = 2\partial_k \bar{\Gamma}^{i}_{jl} - \underbrace{(\partial_j \bar{\Gamma}^{i}_{kl} + \partial_l \bar{\Gamma}^{i}_{jk})}_{-\partial_k \bar{\Gamma}^{i}_{jl}}$$

(dalle 10.20)

$$= 3\partial_k \bar{\Gamma}^{i}_{jl}$$

$$\partial_k \bar{\Gamma}^{i}_{jl} = \frac{1}{3}\left[\bar{R}^{i}_{\ jkl} + \bar{R}^{i}_{\ lkj}\right] \qquad [10.22]$$

Possiamo espandere tensori di rango generico nelle nuove variabili

$$T_{k_1 \dots k_m}(\phi + \pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \xi_{i_n}}\right] T_{k_1 \dots k_m}(\phi)\, \xi^{i_1} \dots \xi^{i_n}$$

usando la relazione [10.21] e derivando dalla [10.20] per $n=4$ e $n=5$ e dalla [10.22] si ottiene

$$\partial_{(j_1}\partial_{j_2} \bar{\Gamma}^{i}_{j_3 k)} = -\frac{1}{2} D_{j_1} \bar{R}^{i}_{\ j_2 j_3}$$

$$\partial_{(j_1}\partial_{j_2}\partial_{j_3} \bar{\Gamma}^{i}_{j_4) k} = -\frac{3}{5}\left[D_{(j_1} D_{j_2} \bar{R}^{i}_{\ j_3 k j_4} + \frac{2}{9} \bar{R}^{i}_{\ (j_1 j_2}{}^{l} R_{j_3 l j_4) k}\right]$$

Da queste relazioni si ottengono i coefficienti per l'espansione

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i} T_{k_1 \dots k_n}(\phi) = D_i T_{k_1 \dots k_n}(\phi)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^{i_1}} \frac{\partial}{\partial \xi^{i_2}} T_{k_1 \dots k_n}(\phi) = D_{(i_1} D_{i_2)} T_{k_1 \dots k_n}(\phi) \qquad [10.23]$$
$$- \frac{1}{3} \sum_{p=1}^{n} \bar{R}^{j}{}_{(i_1 k_p i_2)} T_{k_1 \dots k_{p-1} j k_{p+1} \dots k_n}(\phi)$$

per un tensore di rango 2

$$T_{kl}(\varphi+\pi) = T_{kl}(\varphi) + D_i T_{kl} \xi^i +$$
$$+ \frac{1}{2} \left[D_{i_1} D_{i_2} T_{kl} - \frac{1}{3} R^{j}{}_{i_1 k i_2} T_{jl} - (k \leftrightarrow l) \right] \xi^{i_1} \xi^{i_2}$$
$$+ O(\xi^3) \qquad [10.24]$$

(f) Applicazione al calcolo:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left[G_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial^a X^\nu + i \varepsilon^{ab} B_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \right]$$

ricordando che $D_\rho G_{\mu\nu} = 0$ dalla [10.24]

$$G_{\mu\nu} \longrightarrow G_{\mu\nu} - \frac{1}{3} R_{\mu\alpha\nu\beta} \xi^\alpha \xi^\beta$$

$$\partial_a X^\mu \longrightarrow \partial_a X^\mu + D_a \xi^\mu + \frac{1}{3} R^\mu{}_{\alpha\beta\nu} \xi^\alpha \xi^\beta \partial_a X^\nu$$

$$B_{\mu\nu} \longrightarrow B_{\mu\nu} + D_\rho B_{\mu\nu} \xi^\rho + \frac{1}{2}\Big[D_\rho D_\sigma B_{\mu\nu} - \frac{1}{3} R^\tau{}_{\rho\mu\sigma} B_{\tau\nu} - \frac{1}{3} R^\tau{}_{\rho\nu\sigma} B_{\tau\mu}\Big]\xi^\rho \xi^\sigma$$

sostituendo nell'azione e tenendo i termini fino al secondo ordine in ξ si ha

$$\mathcal{L}_{(e)} = \frac{1}{2} G_{\mu\nu} \nabla_a \xi^\mu \nabla_a \xi^\nu - \frac{1}{2} R_{\mu\rho\sigma\nu} \partial_a X^\mu \partial_a X^\nu \xi^\rho \xi^\sigma$$
$$+ \frac{i}{2} \epsilon^{ab} \Big[\underset{①}{B_{\mu\nu} \nabla_a \xi^\mu \nabla_b \xi^\nu} + \underset{②}{2 \nabla_\rho B_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b \xi^\nu \xi^\rho}$$
$$+ \underset{③}{\frac{1}{2} \nabla_\rho \nabla_\sigma B_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \xi^\rho \xi^\sigma} - \underset{④}{R^\tau{}_{\rho\sigma\mu} B_{\tau\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \xi^\rho \xi^\sigma} \Big] \qquad [10.25]$$

troviamo un risultato utile

$$[\nabla_a, \nabla_b] \xi^\mu = \nabla_a \nabla_b \xi^\mu - \nabla_b \nabla_a \xi^\mu$$

$$\nabla_a \nabla_b \xi^\mu = \partial_a \nabla_b \xi^\mu + \partial_a X^\rho \Gamma^\mu_{\rho\tau} \nabla_b \xi^\tau =$$
$$= \partial_a (\partial_b \xi^\mu + \partial_b X^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\tau} \xi^\tau) +$$
$$+ \partial_a X^\rho \Gamma^\mu_{\rho\tau} (\partial_b \xi^\tau + \partial_b X^\lambda \Gamma^\tau_{\lambda\sigma} \xi^\sigma) =$$

$$= \underline{\partial_a \partial_b \xi^\mu} + \underline{(\partial_a \partial_b X^\lambda)} \Gamma^\mu_{\lambda\tau} \xi^\tau + (\partial_b X^\lambda) \partial_a \Gamma^\mu_{\lambda\tau} \xi^\tau +$$
$$+ \partial_b X^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\tau} \partial_a \xi^\tau + \partial_a X^\rho \Gamma^\mu_{\rho\tau} \partial_b \xi^\tau +$$
$$+ \partial_a X^\rho \partial_b X^\lambda \Gamma^\mu_{\rho\tau} \Gamma^\tau_{\lambda\sigma} \xi^\sigma$$

$$[\nabla_a, \nabla_b] \xi^\mu = \partial_a X^\rho \partial_b X^\lambda (\partial_\rho \Gamma^\mu_{\lambda\tau} - \partial_\lambda \Gamma^\mu_{\rho\tau}) \xi^\tau +$$
$$+ \partial_a X^\rho \partial_b X^\lambda (\Gamma^\mu_{\rho\kappa} \Gamma^\kappa_{\lambda\tau} - \Gamma^\mu_{\lambda\kappa} \Gamma^\kappa_{\rho\tau}) \xi^\tau$$

$$[\nabla_a, \nabla_b]\,\xi^\mu = \partial_a X^\rho \partial_b X^\lambda R^\mu{}_{\tau\lambda\rho}\,\xi^\tau \qquad [10.26]$$

torniamo alla [10.25]

$$① = \frac{i}{2}\epsilon^{ab} B_{\mu\nu} \nabla_a \xi^\mu \nabla_b \xi^\nu$$

per parti

$$= -\frac{i}{2}\epsilon^{ab} \nabla_\rho B_{\mu\nu}\, \partial_a X^\rho \xi^\mu \nabla_b \xi^\nu$$

$$-\frac{i}{4}\epsilon^{ab} B_{\mu\nu} \xi^\mu [\nabla_a, \nabla_b]\,\xi^\nu$$

$$= \frac{i}{2}\epsilon^{ab} \nabla_\rho B_{\mu\nu} \xi^\mu \nabla_a \xi^\nu \partial_b X^\rho$$

$$+\frac{i}{4}\epsilon^{ab} B_{\mu\nu} \xi^\mu \partial_a X^\rho \partial_b X^\sigma R^\nu{}_{\lambda\rho\sigma}\,\xi^\lambda \qquad [10.27]$$

$$③ = i\,\epsilon^{ab} \nabla_\mu B_{\nu\rho} \xi^\mu \nabla_a \xi^\nu \partial_b X^\rho$$

$$= \frac{i}{2}\epsilon^{ab}(\nabla_\mu B_{\nu\rho} + \nabla_\nu B_{\rho\mu})\,\xi^\mu \nabla_a \xi^\nu \partial_b X^\rho$$

$$+\frac{i}{2}\epsilon^{ab}(\nabla_\mu B_{\nu\rho} \underbrace{- \nabla_\nu B_{\rho\mu}}_{-(-)\nabla_\nu B_{\mu\rho}})\,\xi^\mu \nabla_a \xi^\nu \partial_b X^\rho$$

$$\frac{i}{4}\epsilon^{ab}(\nabla_\mu B_{\nu\rho} + \nabla_\nu B_{\mu\rho})\,\nabla_a(\xi^\mu \xi^\nu)\,\partial_b X^\rho$$

$$② \longrightarrow \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}(\nabla_\mu B_{\nu\rho} + \nabla_\nu B_{\rho\mu})\xi^\mu \nabla_a \xi^\nu \partial_b X^\rho$$

$$+\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}\ \nabla_\mu B_{\nu\rho}\nabla_a(\xi^\mu\xi^\nu)\partial_b X^\rho$$

integrando per parti

$$\rightarrow \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}(\nabla_\mu B_{\nu\rho} + \nabla_\nu B_{\rho\mu})\xi^\mu \nabla_a \xi^\nu \partial_b X^\rho$$

$$-\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}\nabla_\sigma \nabla_\mu B_{\nu\rho}\ \xi^\mu\xi^\nu \partial_b X^\rho \partial_a X^\sigma$$

$$\rightarrow \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}(\nabla_\mu B_{\nu\rho} + \nabla_\nu B_{\rho\mu})\xi^\mu \nabla_a \xi^\nu \partial_b X^\rho$$

$$+\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}\nabla_\sigma \nabla_\mu B_{\nu\rho}\ \xi^\mu\xi^\nu \partial_a X^\rho \partial_b X^\sigma \qquad [10.28]$$

[10.27] + [10.28]

$$①+② \longrightarrow \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}H_{\mu\nu\rho}\xi^\mu \nabla_a \xi^\nu \partial_b X^\rho$$

$$+\frac{i}{4}B_{\mu\nu}\xi^\mu \partial_a X^\rho \partial_b X^\sigma R^\nu{}_{\lambda\rho\sigma}\xi^\lambda \varepsilon^{ab}$$

$$+\frac{i}{2}\ \underset{Ⓐ}{\varepsilon^{ab}\nabla_\sigma \nabla_\mu B_{\nu\rho}\ \xi^\mu\xi^\nu \partial_a X^\rho \partial_b X^\sigma} \qquad [10.29]$$

Osserviamo che Ⓐ

$$Ⓐ = \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}\nabla_\sigma \nabla_\mu B_{\nu\rho}\ \xi^\mu\xi^\nu \partial_a X^\rho \partial_b X^\sigma =$$

$$= \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}\nabla_\mu \nabla_\sigma B_{\nu\rho}\ \xi^\mu\xi^\nu \partial_a X^\rho \partial_b X^\sigma$$

$$+\frac{i}{2}\varepsilon^{ab}[\nabla_\sigma, \nabla_\mu] B_{\nu\rho}\ \xi^\mu\xi^\nu \partial_a X^\rho \partial_b X^\sigma$$

e ricordando

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V_\rho = R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} V_\lambda$$

$$\text{(A)} = \frac{i}{2}\varepsilon^{ab}\nabla_\mu\nabla_\sigma B_{\nu\rho}\xi^\mu\xi^\nu\partial_a X^\rho\partial_b X^\sigma$$
$$+\frac{i}{2}\varepsilon^{ab} R^\lambda{}_{\nu\sigma\mu} B_{\lambda\rho}\xi^\mu\xi^\nu\partial_a X^\rho\partial_b X^\sigma$$
$$+\frac{i}{2}\varepsilon^{ab} R^\lambda{}_{\rho\sigma\mu} B_{\nu\lambda}\xi^\mu\xi^\nu\partial_a X^\rho\partial_b X^\sigma$$

Quindi:

$$\text{(1)}+\text{(2)} \rightarrow \frac{i}{2}\varepsilon^{ab} H_{\mu\nu\rho}\xi^\mu\nabla_a\xi^\nu\partial_b X^\rho$$
$$\cancel{+\frac{i}{4} B_{\mu\nu}\xi^\mu\partial_a X^\rho\partial_b X^\sigma R^\nu{}_{\lambda\rho\sigma}\xi^\lambda\varepsilon^{ab}}$$
$$+\frac{i}{4}\varepsilon^{ab}\nabla_\mu(\nabla_\sigma B_{\nu\rho}+\nabla_\rho B_{\sigma\nu})\xi^\mu\xi^\nu\partial_a X^\rho\partial_b X^\sigma$$

si cancella con la (3) [10.25]

$$+\frac{i}{2}\varepsilon^{ab} R^\lambda{}_{\nu\sigma\mu} B_{\lambda\rho}\xi^\mu\xi^\nu\partial_a X^\rho\partial_b X^\sigma$$

si cancella con la (4)

$$\cancel{+\frac{i}{2}\varepsilon^{ab} R^\lambda{}_{\underbrace{\rho\sigma\mu}_{-\frac{1}{2}R^\lambda{}_{\mu\rho\sigma}}} B_{\nu\lambda}\xi^\mu\xi^\nu\partial_a X^\rho\partial_b X^\sigma}$$

usando id. ciclica e antisimm. in (ρ,σ)

$$R^\lambda{}_{\rho\sigma\mu} = -R^\lambda{}_{\sigma\mu\rho} - R^\lambda{}_{\mu\rho\sigma} =$$
$$= +R^\lambda{}_{\rho\mu\sigma} - R^\lambda{}_{\mu\rho\sigma} =$$
$$= -R^\lambda{}_{\rho\sigma\mu} - R^\lambda{}_{\mu\rho\sigma}$$
$$\Rightarrow 2R^\lambda{}_{\rho\sigma\mu} = -R^\lambda{}_{\mu\rho\sigma}$$

ricapitolando si ha:

$$\mathcal{L}_{(2)} = \frac{1}{2} G_{\mu\nu} \nabla_a \xi^\mu \nabla_a \xi^\nu - \frac{1}{2} R_{\mu\rho\sigma\nu} \xi^\rho \xi^\sigma \partial_a X^\mu \partial_a X^\nu$$
$$+ \frac{i}{2} \epsilon^{ab} H_{\mu\nu\rho} \xi^\mu \nabla_a \xi^\nu \partial_b X^\rho$$
$$+ \frac{i}{4} \epsilon^{ab} \nabla_\mu H_{\nu\rho\sigma} \xi^\mu \xi^\nu \partial_a X^\rho \partial_b X^\sigma$$

(g) Algoritmo di t'Hooft, introduzione

Data una Lagrangiana generica

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^i \partial_\mu \phi^j G_{ij} + (N^\mu)_{ij} \phi^i \partial_\mu \phi^j + \frac{1}{2} \phi^i M_{ij} \phi^j$$

con $N^\mu_{ij} = - N^\mu_{ji}$ se ci fosse una parte simmetrica ~~sarebbe un contributo ad M_{ij}~~

$$2 N^\mu_{ij} (\bar{\phi}) \phi^i \partial_\mu \phi^j = N^\mu_{ij} (\bar{\phi}) \partial_\mu (\phi^i \phi^j) =$$
$$= - \underbrace{(\partial_\mu N^\mu_{ij} (\bar{\phi}))}_{\tilde{M}_{ij}} \phi^i \phi^j$$

i G_{ij}, M_{ij}, N_{ij} sono in generale funzioni del campo di background.

Definiamo:

$$\nabla_\mu \phi^i = \partial_\mu \phi^i - (N_\mu)^i{}_j \phi^j$$

$$G_{ij} \nabla_\mu \phi^i \nabla_\mu \phi^j = G_{ij} \left(\partial_\mu \phi^i - (N_\mu)^i{}_k \phi^k\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\partial_\mu \phi^j - (N_\mu)^j{}_\ell \phi^\ell\right) =$$

$$= G_{ij} \partial_\mu \phi^i \partial_\mu \phi^j + 2\phi^k (N_\mu)_{ki} \partial_\mu \phi^i$$

$$- (N_\mu N_\mu)_{kl} \phi^k \phi^l$$

quindi si riscrive $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} G_{ij} \nabla_\mu \phi^i \nabla_\mu \phi^j + \frac{1}{2} \phi^i \left[M - N_\mu N_\mu\right]_{ij} \phi^j$$

in questa forma si ha una formale invarianza di gauge

$$\begin{cases} \delta\phi_i = \Lambda_i{}^j \phi_j \\ \delta N_\mu{}^{ij} = \partial_\mu \Lambda^{ij} + N_\mu{}^i{}_k \Lambda^{kj} - \Lambda^i{}_k N_\mu{}^{kj} \end{cases}$$

Dal momento che S ha una manifesta simm. di gauge i controtermini che possono rinormalizzare la teoria devono essere locali e gauge invarianti

$$\mathcal{L}_\infty = A \,\mathrm{tr}\left[M - N_\mu N_\mu\right]$$

con A un coeff. divergente da determinare

(h) calcoliamo il coeff. divergente

nell'euclideo sarà della forma:

$$0 = \int [D\xi] \frac{\delta}{\delta \xi^\rho(\sigma')} \left[\xi^\mu(\sigma) e^{-\frac{1}{2\pi\alpha'}\int (\partial_a \xi^\mu)^2} \right]$$

$$0 = \delta^\mu_\rho \, \delta(\sigma - \sigma') + \frac{1}{2\pi\alpha'} \nabla_{\sigma'} \langle \xi_\rho(\sigma') \xi^\mu(\sigma) \rangle$$

$$\nabla^2_{\sigma'} \langle \xi^\mu(\sigma) \xi^\nu(\sigma') \rangle = -2\pi\alpha' \, \delta(\sigma - \sigma')$$

$$\langle \xi^\mu(\sigma) \xi^\nu(\sigma') \rangle = \frac{\alpha'}{2\pi} \int d^2k \, \frac{e^{ik(\sigma - \sigma')}}{k^2} \eta^{\mu\nu}$$

occorre valutare

$$I = \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m^2} \qquad \text{per } m^2 \to 0$$

$$= \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \int_0^\infty ds \, e^{-sm^2} e^{-D/2} = \int_0^\infty ds \, e^{-sm^2} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} e^{-sk^2}$$

$$= \int_0^\infty ds \, e^{-sm^2} \left(\frac{\pi}{s}\right)^{D/2} \frac{1}{(2\pi)^D} =$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^\infty ds \, e^{-sm^2} s^{-D/2} = \frac{m^{D/2-1}}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma(1 - D/2)$$

sapendo che $\Gamma(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon}$

per $D = 2 - 2\varepsilon$ la parte principale di I è

$$PP(I) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$$

$$\delta I = \delta\omega\,(2-d)\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{k^2} \overset{d=2-2\varepsilon}{=} 2\varepsilon\,\delta\omega\, I$$

infatti per $\ell \to e^{\omega}\ell$ (lunghezze)

$k \to e^{-\omega}k$ (impulsi)

nel lim. $\varepsilon \to 0$ conta solo la parte divergente

$$\delta I = \delta\omega\; 2\varepsilon\,\frac{1}{4\pi\varepsilon} = \frac{\delta\omega}{2\pi}$$

(i) calcoliamo nel ns. caso l'algoritmo di 't Hooft

$$M_{\mu\nu} = -R_{\rho\mu\nu\sigma}\,\partial_a X^\rho \partial_a X^\sigma + \frac{i}{2}\,\varepsilon^{ab}\nabla_\mu H_{\nu\rho\sigma}\,\partial_a X^\rho \partial_b X^\sigma$$

$$N^a_{\ \mu\nu} = \frac{i}{2}\,\varepsilon^{ab} H_{\mu\nu\rho}\,\partial_b X^\rho$$

Quindi

$$tr(M) = -R_{\rho\sigma}\,\partial_a X^\rho \partial_a X^\sigma + \frac{i}{2}\,\varepsilon^{ab}\nabla^\mu H_{\mu\rho\sigma}\,\partial_a X^\rho \partial_b X^\sigma$$

$$tr(N^a N^a) = -\frac{1}{4}\,\partial_a X^\rho \partial_a X^\sigma\, H_{\rho\alpha\beta}H_\sigma^{\ \alpha\beta}$$

$$\mathcal{L}_\infty \sim \left(-R_{\rho\sigma} + \frac{1}{4} H_{\rho\alpha\beta}H_\sigma^{\ \alpha\beta}\right)\partial_a X^\rho \partial_a X^\sigma$$
$$+ \frac{i}{2}\,\varepsilon^{ab}\nabla^\mu H_{\mu\rho\sigma}\,\partial_a X^\rho \partial_b X^\sigma$$

$$\delta\Gamma = \frac{1}{4\pi}\int \delta\omega \left\{ \left(-R_{\sigma\rho} + \frac{1}{4} H_{\rho\alpha\beta} H_{\sigma}{}^{\alpha\beta}\right) \partial_a X^\rho \partial_a X^\sigma + \frac{i}{2}\varepsilon^{ab} \nabla^\mu H_{\mu\rho\sigma} \partial_a X^\rho \partial_b X^\sigma \right\} d^2\sigma$$

$$\delta\Gamma + \delta S_\phi = \frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\, \delta\omega \left\{ \frac{i}{2}\varepsilon^{ab} \partial_a X^\rho \partial_b X^\sigma \left(\nabla^\mu H_{\mu\rho\sigma} - 2\nabla^\mu\phi\, H_{\mu\rho\sigma}\right) + \partial_a X^\rho \partial_a X^\sigma \left(-R_{\rho\sigma} + \frac{1}{4} H_{\rho\alpha\beta} H_\sigma{}^{\alpha\beta} - 2\nabla_\rho \partial_\sigma \phi\right) \right\}$$

ponendo la variazione $=0$ delle 2 strutture simmetrica e antisimmetrica si ottengono le eq di moto di $G_{\mu\nu}$ e $B_{\mu\nu}$ ovvero il punto fisso delle eq. del gruppo di rinormalizzazione.

1) Eq. di B

$$\nabla_\mu H^{\mu\nu\rho} - 2\nabla^\mu\phi\, H^{\mu\nu\rho}$$

$$\nabla_\mu \left(e^{-2\phi} H^{\mu\nu\rho}\right) = 0$$

2) Eq di $G_{\mu\nu}$

$$-R_{\rho\sigma} = 2\nabla_\rho \partial_\sigma \phi - \frac{1}{4} H_{\rho\alpha\beta} H_\sigma{}^{\alpha\beta}$$

3) Eq. del dilatone (non ricavata, secondo ordine)

$$\nabla_\mu \left[(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}\nabla^2\phi - \frac{1}{24} H^2 \right] = 0$$